

Ejercicios y Problemas.

1º Bachillerato de Ciencias.

Matemáticas I.

ÍNDICE:

1. Números reales y complejos	2
2. Álgebra	9
3. Sucesiones	17
4. Trigonometría	22
5. Geometría analítica	28
6. Funciones	36
7. Límites	48
8. Derivadas	54
9. Estadística	63

Total: 73

LibrosMareaVerde.tk
www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Marea verde de Matemáticas

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y de los autores

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-069507

Fecha y hora de registro: 2015-07-09 13:48:48.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



CAPÍTULO 1: NÚMEROS REALES Y COMPLEJOS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. NÚMEROS REALES

- Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tienen una expresión decimal exacta (E) y cuáles la tienen periódica (P):
a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{7}{30}$ d) $\frac{6}{25}$ e) $\frac{7}{8}$ f) $\frac{9}{11}$
- Halla la expresión decimal de las fracciones del ejercicio 1 y comprueba si tu deducción era correcta.
a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{7}{30}$ d) $\frac{6}{25}$ e) $\frac{7}{8}$ f) $\frac{9}{11}$
- Calcula la expresión decimal de las fracciones siguientes:
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{7}{80}$ d) $\frac{2}{125}$ e) $\frac{49}{400}$ $\frac{36}{11}$
- Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales exactas y redúcelas, comprueba con la calculadora que está bien:
a) 7.92835; b) 291.291835; c) 0.23
- Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales periódicas, redúcelas y comprueba que está bien:
a) 2.353535..... b) 87.2365656565.... c) 0.9999..... d) 26.5735735735.....
- ¿Puedes demostrar que 4.9999... es igual a 5? ¿Calcula cuánto vale 2.5999...? Ayuda: Escríbelos en forma de fracción y simplifica.
- Demuestra que $\sqrt[3]{7}$ es irracional.
- ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{47}$?
- ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$? ¿te atreves a dar una razón?
- Haz la división 999999:7 y después haz 1:7, ¿es casualidad?
- Ahora divide 999 entre 37 y después 1:37, ¿es casualidad?
- Escribe 3 números reales que estén entre $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y 1.
- Escribe 5 números racionales que estén entre $\sqrt{2}$ y 1.5.
- Escribe 5 números irracionales que estén entre 3.14 y π .
- Representa en la recta numérica los siguientes números:
a) $\frac{9}{5}$, b) $-\frac{13}{4}$, c) 1.342, d) -2.555555....
- Representa en la recta numérica:
a) $\sqrt{10}$, b) $-\sqrt{6}$, c) $\sqrt{27}$, d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Halla el valor absoluto de los siguientes números:
a) 5 b) -5 c) $-\pi$
- Representa las siguientes funciones:
a) $f(x) = |x^2|$
b) $f(x) = |x^2 - 1|$
c) $f(x) = |\cos x|$
d) $f(x) = |\sqrt{x}|$
- Representa en la recta real y calcula la distancia entre los números reales siguientes:
a) Dist(5, 9)
b) Dist(-2.3, -4.5)
c) Dist(-1/5, 9/5)
d) Dist(-3.272727..., 6.27272727....).
- Escribe los siguientes intervalos mediante conjuntos y represéntalos en la recta real:
1. a) [1, 7) b) (-3, 5) c) (2, 8] d) $(-\infty, 6)$
- Representa en la recta real y escribe en forma de intervalo:
2. a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \leq x < 6$ d) $x \leq 7$

22. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:
- Un porcentaje superior al 26 %.
 - Edad inferior o igual a 18 años.
 - Números cuyo cubo sea superior a 8.
 - Números positivos cuya parte entera tiene 3 cifras.
 - Temperatura inferior a 25 °C.
 - Números para los que existe su raíz cuadrada (es un número real).
 - Números que estén de 5 a una distancia inferior a 4.

23. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos:

a) $E(1, 5)$

b) $E(-2, \frac{8}{3})$

c) $E(-10, 0.001)$

24. Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos:

a) $(4, 7)$

b) $(-7, -4)$

c) $(-3, 2)$

25. ¿Los sueldos superiores a 500 € pero inferiores a 1000 € se pueden poner como intervalo de números reales?

**Pista: 600.222333€ ¿puede ser un sueldo?*

2. NÚMEROS COMPLEJOS

26. Comprueba que:

a) $(1 - i)^4 = -4$

b) $\frac{5 + 10i}{3 - 4i} + \frac{2 - i}{i} = -2$

c) $(1 + i)^5 = -4 - 4i$

27. Realiza las siguientes operaciones con números complejos:

a) $\frac{68}{(1 - i) \cdot (2 - i) \cdot (3 - i)}$

b) $(2 + i) - i(1 - 2i)$

c) $\frac{2 + i}{4 - 3i} + \frac{3 + i}{5i}$

d) $(3 - 2i) \cdot (3 + 2i)$

28. Calcula: (Ayuda: sustituye z por $x + iy$)

a) $\operatorname{Im} \frac{\bar{z}}{z}$

b) $\operatorname{Re}(z^4)$

c) $(\operatorname{Re}(z))^4$

Para los siguientes números complejos:

$$a = 3i; b = -2i; c = 5; d = 1 + i; e = -1 - i$$

29. Representalos gráficamente.

30. Representa gráficamente el conjugado de cada uno de ellos.

31. Representa gráficamente las sumas:

$$a + b$$

$$a + c$$

$$b + d$$

$$d + e$$

32. Representa gráficamente los productos:

$$a \cdot i$$

$$b \cdot i$$

$$c \cdot i$$

$$d \cdot i$$

$$e \cdot i$$

Analiza el resultado. Comprueba que multiplicar por i supone girar 90° el número complejo.

33. Calcula el modulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) $\sqrt{3} - i$

b) $-2 - 2i$

c) $1 - \sqrt{3}i$

d) $-4i$

34. Expresa en forma polar los siguientes números complejos:

a) i

b) $-i$

c) $4 + 4i$

d) -4

35. Comprueba los resultados siguientes:

a) $(1 + i)^{16} = 2^8 = 256$.

b) $\sqrt[3]{27i} = \left\{ \begin{array}{l} 3 e^{i \frac{\pi}{6}} \\ 3 e^{i \frac{5\pi}{6}} \\ 3 e^{i \frac{9\pi}{6}} \end{array} \right\}$

36. Realiza las siguientes operaciones con números complejos, expresándolos previamente en forma exponencial:

a) $\frac{\sqrt{2}i}{-2 - 2i}$

b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right)^{30}$

37. Resuelve las ecuaciones, obteniendo las raíces reales y complejas:

a) $x^2 = -1$

b) $x^3 = -8$

c) $x^4 + 16 = 0$

38. Calcula las raíces n -ésimas de la unidad, para $n = 2, 3$ y 4 . Representarlas gráficamente, y comprobar que están sobre la circunferencia de radio 1, y en los vértices de un polígono regular.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Números reales

1. Calcula los valores exactos de $a + b$, $c - a$ y $a \cdot c$ para los números: (pista: racionalizar)

$a = 2.7$

$b = 3.292929...$

$c = 0.01030303...$

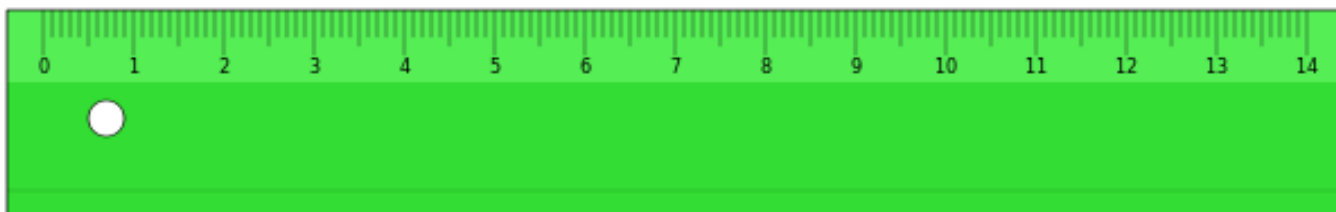
3. Descubre cuál de estos números es irracional:

a) 3.1416

b) $\sqrt{4}$

c) π

4. ¿Podemos encontrar números irracionales en las marcas de una regla graduada? ¿Hay algún punto de la regla (aunque no tenga marca) que se corresponda con un número irracional? Justifica tu respuesta.



5. Clasifica los siguientes números en orden de mayor a menor y después represéntalos en la recta:

a) 7

b) $25/4$

c) $\sqrt{45}$

d) $2 \cdot \pi$

6. Escribe una sucesión infinita de números reales dentro del intervalo $(-1, 1)$.
7. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:
 a) $|-5|$ b) $|4 - 4|$ c) $|3 \cdot 2 + 9|$ d) $\sqrt{7}$ e) $\sqrt{7^2}$
8. Calcula x en las siguientes ecuaciones: (pista: x puede tener dos valores)
 a) $|x| = 5$ b) $|x - 4| = 0$ c) $|3x + 9| = 21$
9. Dibuja las siguientes funciones en un gráfico:
 a) $f(x) = |x| - 5$ b) $f(x) = |x - 4|$ c) $f(x) = |3x + 9|$
10. Elige un día y calcula la distancia que has recorrido en total, y compárala con la distancia entre los puntos inicial (al principio del día) y final (al terminar el día).
11. Un artesano fabrica dos productos. El primero (a) le cuesta 2 horas y 3 euros en material, y el segundo (b) le cuesta 6 horas y 30 euros de material. Si valora en 10 euros cada hora de trabajo, y los vende por (a) 30 y (b) 90 euros, averigua cuál es más rentable para su negocio.
12. Entre Kroflite y Beeline hay otras cinco ciudades. Las siete se encuentran a lo largo de una carretera recta, separadas unas de otras por una distancia entera de kilómetros. Las ciudades se encuentran espaciadas de tal manera que si uno conoce la distancia que una persona ha recorrido entre dos de ellas, puede identificarlas sin ninguna duda. ¿Cuál es la distancia mínima entre Kroflite y Beeline para que esto sea posible?
13. Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:
 a) $|x| < 1$
 b) $|x| \leq 1$
 c) $|x| > 1$
 d) $|x| \geq 1$
14. Halla dos números que disten 6 unidades de 3, y otros dos que disten 3.5 unidades de -2 , calcula después la diferencia entre el mayor y el menor de todos estos números.
15. Escribe el intervalo $[-3, 5] \cap (3, 8)$.
16. Escribe el intervalo formado por los números reales x que cumplen $|x - 8| \leq 3$.
17. Determina los conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ y $-A$ en los casos siguientes:
 a) $A = [-11, -9]$; $B = (-1, 6)$
 b) $A = [-5, 5]$; $B = (3, 4)$

Números complejos

18. Comprueba si: a) $\left| \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1$. B) $|\cos \alpha + i \sin \alpha| = |e^{i\theta}| = 1$.
19. Calcula: a) $(2 + i)^5$ b) $\frac{13}{|2 - 3i|}$ c) $\frac{(3 + 2i)^2}{(2 + 3i)^3}$ d) $i(\sqrt{3} - i)(1 + \sqrt{3}i)$ e) $(1 + i)^8$ f) $(1 + i)^{-1}$ g) $(\sqrt{3} + i)^{-9}$.
20. Demuestra que z es real si y solo si $z = \bar{z}$.
21. Verifica que el inverso de z , z^{-1} , es igual a $\frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$. Calcula el inverso de $2 + 3i$.

22. Calcula el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:
 a) $-3 + 3i$ b) -3 c) $-3i$ d) $3 - 3i$.
23. Expresa en forma polar y trigonométrica los siguientes números complejos:
 a) $5i$
 b) $-7i$
 c) $5 - 5i$
 d) $\sqrt{3} + i$.
24. Expresa en forma binómica los siguientes números complejos en forma polar:
 a) De módulo 2 y argumento $\pi/3$
 b) De módulo 3 y argumento $-\pi/4$
 c) De módulo 1 y argumento $\pi/2$
 d) De módulo 5 y argumento $2\pi/3$
25. Realiza las siguientes operaciones con números complejos, expresándolos previamente en forma trigonométrica:
 a) $(\sqrt{3} + i)^{60}$
 b) $(4 - 4i)^{-11}$
 c) $\frac{(1 - \sqrt{3}i)^{12}}{(-2 - 2i)^8}$.
26. Utiliza la fórmula de Moivre para expresar en función de $\sin \theta$ y $\cos \theta$:
 a) $\cos 2\theta$
 b) $\sin 2\theta$
 c) $\cos 3\theta$
 d) $\sin 3\theta$.
27. Calcula el argumento principal de los siguientes números complejos:
 a) $\frac{-3}{\sqrt{3} + i}$ b) $\frac{-i}{1 - i}$ c) $(1 - i\sqrt{3})^7$.
28. Calcula, representa en el plano complejo y escribe en forma binómica:
 a) $\sqrt{-3i}$
 b) $\sqrt{1 + \sqrt{3}i}$
 c) $\sqrt[3]{-27}$
 d) $\sqrt[3]{1 - i}$
 e) $\sqrt[4]{-81}$.
29. Resuelve las ecuaciones:
 a) $x^3 = -27$.
 b) $x^4 = -81$.
 c) $x^5 - 32 = 0$.
 d) $x^3 - 8 = 0$.
30. Calcula todos los valores de z para los que:
 a) $z^6 + 64 = 0$.
 b) $(z^2 + 3z - 2)^2 - (2z^2 - z + 1)^2 = 0$.
 c) $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
31. Calcula las raíces quintas de la unidad y represéntalas en el plano. Calcula también las raíces quintas de -1 , represéntalas también. Generaliza este resultado.
32. Calcula las cuatro raíces de $z^4 + 9 = 0$ y utilízalas para factorizar $z^4 + 9$ en dos polinomios cuadráticos con coeficientes reales.
33. Resuelve la ecuación: $z^2 + 3z - 1 = 0$.
34. Calcula a para que el número complejo $\frac{a+i}{3-i}$ tenga su parte real igual a su parte imaginaria.

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala cuál de los siguientes números es irracional:
 a) 6.3333333..... b) $7/3$ c) e d) 5.98234234234....
2. La solución de la ecuación $|3x + 9| = 21$ es:
 a) $x = 10, x = -4$ b) $x = 10$ c) $x = -10, x = 4$ d) $x = -4$
3. Determina el conjunto $A - B$ si $A = [-11, 9]$; $B = (-1, 6)$:
 a) $[-11, -1) \cup [6, 9]$ b) $[-11, -1) \cup (6, 9]$ c) $[-11, -1] \cup (6, 9]$ d) $[-11, -1] \cup [6, 9]$
4. Calcula $\frac{(3 + 2i) \cdot (3 - 2i)}{(2 + 3i)^3}$
 a) $-46 + 9i$ b) $62 + 63i$ c) $-46 + 63i$ d) Ninguna de las anteriores
5. Resuelve la ecuación $x^4 = 1$.
 a) $x = 1$ b) $x = 1, x = -1$ c) $x = \pm i$ d) $x = \pm 1, x = \pm i$
6. Expresa en forma binómica el siguiente número complejo de módulo 2 y argumento $\pi/3$
 a) $1 + \sqrt{3}i$ b) $\sqrt{3} + i$ c) $1 - \sqrt{3}i$ d) $1/2 + \sqrt{3}/2i$
7. Calcula $(1 + i)^6$
 a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ b) -8 c) $1 - i$ d) $-8i$
8. Expresa en forma trigonométrica el siguiente número complejo $5i$:
 a) $5(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$ b) $(5, \pi/2)$ c) $5(\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2))$ d) $5(\sin(90^\circ) + i\cos(90^\circ))$
9. Calcula el módulo y el argumento principal del siguiente número complejo $-3 + 3i$:
 a) 18, 135° b) $3\sqrt{2}, 3\pi/4$ c) $3\sqrt{2}, 7\pi/4$ d) 3, $5\pi/4$
10. Calcula: $x = \sqrt{-1}$
 a) $x = i$ b) $x = -i$ c) $x = i, x = -i$ d) No tiene solución

RESUMEN

		Ejemplos
Números reales	Está formado por la unión de los números racionales y los números irracionales	5, -4, 2/3, 7.5, π , e, Φ ...
Densidad de los Números Reales	El conjunto de los números reales es denso, es decir, entre cada dos números reales hay infinitos números.	Entre 0 y 1 calculando el punto medio obtenemos infinitos puntos: 0, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625,..., 1
Valor absoluto	$ x = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$ -32 = 32 = +32 $
Distancia en la recta real	$\text{Dist}(x, y) = x - y $	$\text{Dist}(3, 8) = 8 - 3 = 5$ $\text{Dist}(-2, -9) = -9 - (-2) = -9 + 2 = -7 = 7$
Intervalos	Abierto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ Cerrado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ Semiabierto (izq): $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ Semiabierto (der): $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	(3, 5) [3, 5] (2, 8] [1, 7)
Entornos	Es una forma especial de expresar los intervalos abiertos. Se define como el conjunto de números que están a una distancia de a menor que r: $E(a, r)$	$E(2, 4) = (2 - 4, 2 + 4) = (-2, 6)$
El número i	$i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$	
Forma binómica	$z = x + i \cdot y$	
Suma de complejos	$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i \cdot (y + v)$	$(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$
Producto de complejos	$(x + iy) \cdot (u + iv) = (x \cdot u - y \cdot v) + i \cdot (x \cdot v + y \cdot u)$	$(2 - i) \cdot (1 + 2i) = 2 + 4i - i - 2i^2 = 2 + 4i - i + 2 = 4 + 3i$
División de complejos	Se multiplica, numerador y denominador por el conjugado del denominador. Así se consigue que el denominador sea un número real	$\frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{2} = 1 - i$
Forma trigonométrica	$z = r (\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta)$	$z = 2 \cdot (\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen } \frac{\pi}{3})$
Producto de complejos	Se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos	$z \cdot z = 4 \cdot (\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen } \frac{2\pi}{3})$
División de complejos	Se dividen sus módulos y se restan sus argumentos	$z/z = 1 \cdot (\cos 0 + i \cdot \text{sen } 0) = 1$
Fórmula de Moivre	$(\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta)^n = \cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)$	

CAPÍTULO 2: ÁLGEBRA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. POLINOMIOS.

- Realiza la suma y resta de los siguientes polinomios:
a) $x^2 - 2$ b) $3x^4 + x^3 - 1$
- Realiza las siguientes sumas de polinomios:
a) $(x^2 - x) + (-2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 2x^2 + x - 2)$
b) $-x^4 + (x^3 + 2x - 3) + (-3x^2 - 5x + 4) + (2x^3 - x + 5)$
- Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:
a) $2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 4x - 1$ b) $-7x^3 - 6x + 5$ c) $-x^4 + 3x^2 - 8x + 7$
- Considera los polinomios $p \equiv x^3 - 6x + 2$, $q \equiv 3x^2 + 3x + 1$, así como el polinomio suma $s \equiv p + q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x = -2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.
- Obtén el valor del polinomio $p \equiv -x - 5x^3 + 2x - 2$ en $x = 3$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x = 3$?
- Realiza las siguientes diferencias de polinomios:
a) $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$ b) $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$ c) $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$
- Efectúa los siguientes productos de polinomios:
a) $(5x^3 - 2x) \cdot (-4x^3)$ b) $(2x^4 + x) \cdot (-3x - 4)$
c) $(2x^5 + x^3 - x^2) \cdot (3x^2 - x)$ d) $(-1) \cdot (7x^3 - 4x^2 - 3x + 1)$
- Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:
a) $4x^3 + 3x^3 + 2x^2$ b) $-2x^3 + x^2 - 1$ c) $-x^2 + x - 7$
- Calcula y simplifica los siguientes productos:
a) $3x \cdot (2x^3 + 4x^2 - 6)$ b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$
c) $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^2)$ d) $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$
- Realiza los siguientes productos de polinomios:
a) $x^2 \cdot (-5x^4 - 3x^2 + 1) \cdot 2x^3$ b) $(2x^2 - 3) \cdot (-3x^2 - 5x + 4) \cdot (-x)$
- De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:
a) $-16x^4 - 20x^3 + 10x^2$ b) $24x^4 - 30x^2$
- Realiza los cálculos:
a) $(2 + 3a)^2$ b) $(-x + 3)^2$ c) $(-3x + 2)^2$ d) $(x^2 - 1)^3$ e) $(4x^2 + 2)^3$
- Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:
a) $(a + b + c)^2$ b) $(a + b - c)^2$
- Desarrolla las siguientes potencias:
a) $(2x - 5y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x^2 - 5/x)^2$
d) $(3a - b)^2$ e) $(a^2 + b^2)^2$ f) $(3/5y - 2/y)^2$
- Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:
a) $a^4 + 6a^2 + 9$ b) $9x^2 - 6x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$
d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 - 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$
- Efectúa estos productos:
a) $(4x^2 + 3y) \cdot (4x^2 - 3y)$ b) $(2x^2 + 8) \cdot (2x^2 - 8)$ c) $(-x^2 + 3x) \cdot (x^2 + 3x)$
- Divide los siguientes polinomios:
a) $2x^4 - x^2 - x + 7$ entre $x^2 + 2x + 4$. b) $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ entre $5x^3 - x^2 - x + 3$
c) $4x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$ entre $-2x^3 + x + 3$ d) $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ entre $4x^3 + x^2 + x - 1$
e) $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^3 + 1$

18. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x) = x^2 - x - 3$ como polinomio cociente y $r(x) = -3x^2 - 1$ como resto.
19. Usa la regla de *Ruffini* para realizar las siguientes divisiones de polinomios:
- a) $-3x^2 + x + 1$ entre $x - 1$ b) $x^4 + 2x^3 - 2x + 1$ entre $x - 2$
 c) $4x^3 - 3x^2 - 1$ entre $x + 1$ d) $x^3 - 9x + 1$ entre $x - 3$
20. Estudia si es posible usar la regla de *Ruffini*, de alguna forma, para dividir $x^3 + 2x^2 + 5x + 7$ entre $2x + 3$.
21. Utiliza la regla de *Ruffini* para conocer el valor del polinomio $-3x^3 + 7x^2 + 2x + 4$ en $x = 5$.
22. Emplea la regla de *Ruffini* para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:
- a) $\alpha = 3$ de $x^3 - 4x^2 + 5$ b) $\beta = -2$ de $-x^3 - 2x^2 + x + 2$
 c) $\gamma = 1$ de $-2x^4 + x + 1$ d) $\sigma = -1$ de $2x^3 + 2x^2$
23. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces tuyas y, después, determina cuáles lo son:
- a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$ b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$
 c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$ d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$
24. Comprueba que $-\frac{1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$.
25. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces tuyas y, después, determina cuáles lo son:
- a) $3x^2 + 4x - 5$ b) $2x^3 - 9x^2 + 12x + 2$
26. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real α .
- a) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x) + p_2(x)$?
 b) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x) \cdot p_2(x)$?
 c) ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4 \cdot p_1(x)$?
27. Construye un polinomio de grado 4 tal que posea tres raíces distintas.
28. Determina un polinomio de grado 4 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.
29. Construye un polinomio de grado 4 de forma que tenga una única raíz.
30. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

admite al número 0 como raíz.

31. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ admite al número 1 como raíz.
32. Determina las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:
- a) $x + 5$ b) $-x + 3$ c) $7x - 5$ d) $-3x - 11$
 e) $-7x$ f) $x^2 - 8x$ g) $4x^2 - x - 3$ h) $x^3 - 4x$ i) $x^3 + 25x$
33. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:
- a) $\frac{x^2 + 4x}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$ b) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$ c) $\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$
34. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:
- a) $\frac{3x^2 - 6x}{9x^2 + 15}$ b) $\frac{a^3 - 5a^2}{7a^3 + 4a^2}$ c) $\frac{x^2 y + 3xy^2}{4xy}$ d) $\frac{2a^2 b^2 + 3ab}{a^3 b - ab}$
35. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:
- a) $\frac{5}{-3x + 12} + \frac{x + 2}{x^2 - 4x}$ b) $\frac{-x}{x^2 - 2x + 1} - \frac{3x - 1}{x^2 - 1}$
36. Efectúa los siguientes cálculos:
- a) $\frac{2x + 1}{x^2 + 1} + \frac{4}{x}$ b) $\frac{1}{x - 2} + \frac{3}{x + 1}$ c) $\frac{-x}{x^2 + 3x} \cdot \frac{1}{x - 1}$ d) $\frac{x - 2}{x^2 + 3x} : \frac{x - 2}{x + 3}$

37. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, únicamente uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

$$a) \frac{-x^2 + x - 1}{x^3} - \frac{3x + 2}{x^2}$$

$$b) \frac{x - 2}{x^2 + 3x} - \frac{8}{x + 3}$$

38. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad:

$$a) \frac{8a^4b^3}{2a^2b^2} = 4a^2b$$

$$b) \frac{4x^3y^2 - 3xy^2}{2xy} = 2x^2y - \frac{3}{2}y$$

$$c) \frac{3x^2 - 9x}{6x + 12} = \frac{x^2 - 3x}{x + 4}$$

$$d) \frac{6a^2b^2 + 8a^2b - 10ab}{2ab^2 + 16a^2b} = \frac{3ab + 4a - 5}{b + 8a}$$

2. ECUACIONES E INECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO:

39. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$a) \frac{2x - 4}{3x - 2} = \frac{4}{7}$$

$$b) \frac{x + 8}{x - 1} - \frac{x + 4}{x + 1} = \frac{12x}{x^2 - 1}$$

$$c) \frac{3(2x + 1)}{4} - \frac{5x + 3}{6} + 4x + \frac{x + 1}{3} = x + \frac{151}{12}$$

40. Resolver: a) $\frac{x^2}{25} + \frac{(x + 3)^2}{9} = 1$ b) $\frac{x^2}{16} = 1 + \frac{3/4x}{9}$ c) $4x^4 + 8x^2 - 12 = 0$ d) $80x^4 - 48x^2 - 12 = 0$

41. Sumando siete unidades al doble de un número más los $3/2$ del mismo obtenemos como resultado el séxtuplo de dicho número menos 23. ¿De qué número se trata?

42. Las dimensiones de un rectángulo son 54 y 36 m. Traza una paralela al lado que mide 36 m de modo que se forme un rectángulo semejante al primero. ¿Cuáles son las longitudes de los segmentos en que dicha paralela divide al lado de 54 m?

43. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300000 €. Si la finca vale 4 veces más que el coche y el piso cinco veces más que la finca. ¿Cuánto vale cada cosa?

44. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

$$a) 5 + 3x < 2x + 4 \quad b) 3 + 4x \leq 8x + 6 \quad c) 5 + 4x > 3x + 2 \quad d) 1 + 3x \geq 5x + 7$$

45. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

$$a) 4(3 + 2x) < -(6x + 8) \quad b) 7(2 + 3x) \leq 5(6x + 3) \quad c) 9(2 + 4x) + 4(5x - 2) > 3(2x + 1)$$

46. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

$$a) 6 + 3x < x/3 + 1 \quad b) 5 + 5x/2 \leq 9x/2 + 1 \quad c) (2 + 5x)/3 > 4x + 1 \quad d) (1 + 5x)/2 + 1 \geq (3x + 6)/4$$

47. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

$$a) [2, \infty) \quad b) (-\infty, 3) \quad c) (4, \infty) \quad d) (-\infty, 2)$$

48. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

$$a) \sqrt{2x - 3} \quad b) \sqrt{-x - 9} \quad c) \sqrt{2 - 7x} \quad d) \sqrt{-2x + 7}$$

49. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

$$a) x^2 - 1 \geq 0 \quad b) x^2 - 4 \leq 0 \quad c) x^2 - 9 > 0 \quad d) x^2 + 4 \geq 0$$

$$e) 2x^2 - 50 < 0 \quad f) 3x^2 + 12 \leq 0 \quad g) 5x^2 - 45 > 0 \quad h) x^2 + 1 \geq 0$$

50. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

$$a) x^2 + x \leq 0 \quad b) x^2 - 5x > 0 \quad c) x^2 \leq 8x$$

$$d) x^2 \leq 3x \quad e) 2x^2 - 3x > 0 \quad f) 5x^2 - 10x < 0$$

51. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

$$a) x^2 - 2x - 3 \leq 0 \quad b) -x^2 - 2x + 8 \geq 0 \quad c) x^2 + 9x + 14 > 0 \quad d) x^2 - 6x + 9 \leq 0$$

$$e) -x^2 - 4x - 5 < 0 \quad f) x^2 + 8x + 16 > 0 \quad g) x^2 + x + 3 \geq 0 \quad h) 2x^2 - 3x - 5 \leq 0$$

52. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

$$a) x^2 + x - 6 > 0 \quad b) x^2 - x - 12 \leq 0 \quad c) x^2 - x - 20 < 0 \quad d) x^2 + 5x - 14 \geq 0$$

$$e) -2x^2 + 3x + 2 > 0 \quad f) 3x^2 + 2x - 1 \leq 0 \quad g) 5x^2 - 7x - 6 \geq 0 \quad h) 2x^2 + x - 15 < 0$$

53. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

$$a) \sqrt{x^2 - 1} \quad b) \sqrt{-x^2 + 4} \quad c) \sqrt{x^2 + 5x + 6} \quad d) \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

54. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

$$a) (2x + 5)(2x - 5) \leq 11 \quad b) (2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 50 \quad c) \frac{3x - 2}{x} \leq \frac{5 - 2x}{x + 3}$$

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES :

55. Resolver por el método de Gauss los sistemas:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 4x + 2y - z = 5 \\ 5x - 3y + z = 3 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 7x + 2y - z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 0 \end{cases} \end{array}$$

56. Resuelve y discute si es posible el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

57. Discutir y resolver cuando sea posible, los siguientes sistemas lineales de ecuaciones.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x - 6y - 4z = -7 \\ x + 8y + 4z = 6 \\ x + y = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + y - 6z - 4t = 6 \\ 3x + 2y - 3z + 8t = -7 \\ 3x - y - 6z - 4t = 2 \\ 4x - y + 3z + 12t = 0 \end{cases} \end{array}$$

58. Compramos 8 kg de café natural y 5 kg de café torrefacto, pagando 66 €. Calcula el precio del kilo de cada tipo de café, sabiendo que si mezclamos mitad y mitad resulta el kilo a 5 €.

59. Una madre tiene el doble de la suma de las edades de sus hijos. La edad del hijo menor es la mitad de la de su hermano, y la suma de las edades de los niños y la de la madre es 45 años. ¿Qué edades tienen?

60. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300000 €. Si la finca vale cuatro veces más que el coche y el piso cinco veces más que la finca, ¿cuánto vale cada cosa?

61. Las tres cifras de un número suman 18. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtiene 594; la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos. Halla dicho número.

62. Encuentra la región factible del sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 5y \leq 30 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

63. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x-2y+3}{3} \geq \frac{x-y+1}{2} \\ 1 - \frac{2x-4-y}{3} + \frac{2x+3y}{2} \geq 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x+y \geq 1 \\ y-2x \geq 3 \\ y \leq 5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x+y \geq 0 \\ 2x-y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} (x+1) \cdot 10 + x \leq 6(2x+1) \\ 4(x-10) < -6(2-x) - 6x \end{cases} \end{array}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Polinomios:

1. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{7x-9}{(x+3) \cdot (2x-16)} & \text{b)} \frac{-5x+7}{x^2-5x+6} & \text{c)} \frac{9x^3-2x}{-2x^4-3x^2-4} & \text{d)} \frac{2x-3y+5}{x^2+y^2} \end{array}$$

2. Calcular cuánto debe valer la letra m para que el valor numérico de la expresión algebraica siguiente sea -2 para $x = 0$.

$$\frac{x^3 - mx + 4}{(x^4 - 1)(mx + 2)}$$

3. Consideremos los polinomios $p(x) = -3x^3 + 2x^2 - 5x - 4$, $q(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$ y $r(x) = 3x^2 + 5x - 7$. Realiza las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} p + q + r & \text{b)} p - q & \text{c)} p \cdot r & \text{d)} p \cdot r - q \end{array}$$

4. Efectúa las divisiones de polinomios:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 7x - 9 \text{ entre } 3x^2 + 2x - 5 \\ \text{b)} } 6x^5 - 7x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 10x - 5 \text{ entre } x^3 + 3x + 5 \end{array}$$

5. Señala sin efectuar la división, si las siguientes divisiones son exactas o no:

a) $\frac{x^5 + 7x^4 - 13x^3 + 5x^2 - 17x + 5}{x-3}$

b) $\frac{x^5 + x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 4}{x-2}$

c) $\frac{9x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 17x - 1}{x-1}$

6. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número 4 sea raíz suya.

7. Escribe dos polinomios de grados diferentes y que tengan en común las raíces 2 y 3.

8. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

9. Encuentra un polinomio $q(x)$ tal que al dividir $p(x) = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x) = 5x^4 + 5x^2 + 1$.

10. Halla las raíces enteras o racionales de los siguientes polinomios:

a) $4x^3 + 11x^2 + 6x - 3$
 $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

b) $3x^3 - 2x^2 + 6x - 3$

c) $3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

d)

11. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

a) $3x^3 + 11x^2 + 5x + 3$
 $3x^3 - 6x^2 + x - 2$

b) $5x^3 + 5x^2 + x - 1$

c) $2x^3 + x^2 + 6x - 3$

d)

12. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

a) $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{4x}{x^2-6x+9}$

b) $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2x^2}{x^2-6x+9}$

c) $\frac{x+2}{x^2-3x} \cdot \frac{2x}{x^2-6x+9}$

d) $\frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2x}{x^2-6x+9}$

13. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto suma por diferencia. En caso afirmativo expresa su procedencia.

a) $x^2 - 6x + 9$

b) $x^4 + 8x^2 + 16$

c) $x^2 + \sqrt{20}xy + 5y^2$

d) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

e) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

f) $x^2 - 36$

g) $5x^2 + 1$

h) $5x^2 - 11$

i) $x^4 - 3y^2$

14. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{2}{x(5-x)} + \frac{6}{2(5-x)}$

b) $\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

c) $\frac{2x+1}{4x^2-1}$

15. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^3 + \frac{1}{x}\right)$

b) $\frac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x-a} : \frac{x+a}{x-a}$

c) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{ab}{a-b}$

16. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x-y}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x+y}} : \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{a-y}}$

b) $\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)$

c) $\frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{3}{y}} \cdot \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{3}{x} + \frac{5}{y}}$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas:

17. Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{3x-1}{2x-4} = \frac{5}{9}$

b) $\frac{x}{2} + 5 = \frac{3x}{6} - 7$

c) $\frac{5}{x+1} = \frac{5x}{x-1} - 2$

18. Resolver las siguientes ecuaciones indicando cuantas soluciones tienen y cuales son:

a) $\frac{16x^3-7}{2x^2-3} = 5+8x$

b) $x^4 + 8x^2 - 12 = 0$

c) $80x^4 - 48x^2 + 7 = 0$

d) $\frac{x^2}{16} + \frac{(x+5)^2}{25} = 1$

19. El cateto mayor de un triángulo rectángulo es una unidad mayor que el cateto menor. La hipotenusa es tres unidades mayor que el cateto menor. Se pide:

a) Escribir la expresión algebraica que resulta de aplicar el Teorema de Pitágoras.

b) Calcular la hipotenusa y los catetos.

20. En una competición de baloncesto a doble vuelta participan doce equipos. Cada partido ganado vale 2 puntos y los partidos perdidos, 1 punto (no puede haber empates). Al final de la competición, un equipo tiene 36 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado?

21. Una caja de forma cúbica se llena con cierto número de cubitos de un centímetro cúbico y sobran 71 cubitos; pero si todos los cubitos que hay se ponen en otra caja que tiene un centímetro más por cada arista, faltan 200 para llenarla. Calcula las longitudes de las aristas de las dos cajas y el número de cubitos que hay.
22. Las tres cifras de un número suman 24. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtienen 198; la cifra de las decenas es la media aritmética entre las otras dos. Halla el número.
23. Queremos averiguar las edades de una familia formada por los padres y los dos hijos. Si sumamos sus edades de tres en tres, obtenemos 100, 73, 74 y 98 años, respectivamente. ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?
24. Resuelve:
- a) $\frac{x}{3} - 9 < 2$ b) $\frac{5x}{7} - 7 \leq -5x$ c) $4(2x-3) > 1-7x$
- d) $\frac{3(x+4)}{5} < 2x$ e) $\frac{2x-4}{3} + 1 > \frac{9x+6}{6}$ f) $\frac{7x}{2} - 1 < x - \frac{3x+5}{4}$
25. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:
- a) $\sqrt{3x-6}$ b) $\sqrt{-x+3}$ c) $\sqrt{15-3x}$ d) $\sqrt{-6x-24}$
26. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:
- a) $2x^2 - 8 < 0$ b) $-x^2 + 25 \leq 0$ c) $-x^2 + 49 \geq 0$ d) $5x^2 - 45 \geq 0$
- e) $9x^2 - 1 > 0$ f) $16x^2 - 9 < 0$ g) $49x^2 - 36 < 0$ h) $121x^2 + 100 \leq 0$
27. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:
- a) $-2x^2 + 50x \leq 0$ b) $7x^2 + 3x \geq 0$ c) $2x^2 < 8x$
- d) $-2x^2 - 24x \geq 0$ e) $-7x^2 + 14x < 0$ f) $-5x^2 - 30x \geq 0$
28. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:
- a) $5x^2 \leq 0$ b) $7x^2 > 0$ c) $-2x^2 < 0$ d) $6x^2 \geq 0$
29. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:
- a) $\sqrt{2x^2+x-3}$ b) $\sqrt{x^2+2x+1}$ c) $\sqrt{-1+2x-x^2}$
- d) $\sqrt{x^2+3x+5}$ e) $\sqrt{-x^2+12x+36}$ f) $\sqrt{x^2+6x-27}$ g) $\sqrt{1-4x^2}$
30. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss y discute el resultado:
- a) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x+y=2 \\ y+z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+t=3 \\ x+z-t=1 \\ y+z+t=3 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x+y+5z=13 \\ x+y-4z=-6 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} 3x+4y-z=6 \\ 6x-6y+2z=2 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+4y-8z=-8 \\ 4x+8y-2z=-2 \\ 8x-y-4z=-4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-2y+3z+4t=6 \\ 2x-y+z-t=1 \\ x-y+3z+2t=5 \\ 3x-y+2z-3t=1 \end{cases}$

AUTOEVALUACIÓN

- El valor numérico de la expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2} + 5xy^3 - \frac{6}{z}$ en $x = 2$, $y = -1$, $z = -1$ es:
 a) 17 b) 15 c) -3 d) -5
- Al dividir el polinomio $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 1$ entre $q(x) = x^2 + x + 1$ el polinomio resto resultante:
 a) debe ser de grado 2. b) puede ser de grado 2.
 c) debe ser de grado menor que 2. d) ninguna de las opciones precedentes.
- Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres
 a) tiene tres raíces reales b) tiene más de tres raíces reales
 c) tiene tres raíces complejas d) Tiene alguna raíz real.
- ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces reales, ya sean diferentes o con alguna múltiple?
- Tiene como solución $x = 2$ la inequación siguiente:
 a) $x < 2$ b) $x > 2$ c) $x \leq 2$ d) $x + 3 < 5$
- La ecuación $x^2 \leq 4$ tiene de soluciones:
 a) $x \in (-2, 2)$ b) $x \in [-2, 2]$ c) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- La solución de la inequación $|-x + 7| \leq 8$ es:
 a) $[-1, 15]$ b) $(-\infty, -1]$ c) $(-1, 1)$ d) $[1, \infty)$
- Las soluciones posibles de $\sqrt{5x-9}$ son:
 a) $x < 9/5$ b) $x > 9/5$ c) $x \leq 9/5$ d) $x \geq 9/5$
- La solución de la inequación $\frac{2x-3}{x-2} < 1$ es:
 a) $(1, 2)$ b) $(-\infty, 1)$ c) $x < 1 \cup x > 2$ d) $(-1, 2)$
- Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:
 a) La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.
 b) La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio.
 c) La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.
 d) La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio.

RESUMEN

Noción	Descripción	Ejemplos
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios	$-x^3 + 4x^2 + 8x + 6$
Grado de un polinomio	El mayor grado de sus monomios	Grado 3
Suma, resta y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$p = -3x + 6; q = x^2 + 4.$ $p + q = x^2 - 3x + 10;$ $p - q = -x^2 - 3x + 2;$ $p \cdot q = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 24.$
División de dos polinomios	Se obtienen otros dos polinomios, los polinomios cociente ($c(x)$) y resto ($r(x)$), ligados a los polinomios iniciales, los polinomios dividendo ($p(x)$) y divisor ($q(x)$)	$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$
Regla de Ruffini	Nos puede ayudar a la hora de factorizar un polinomio y conocer sus raíces	
Teorema del resto	El valor numérico que adopta un polinomio $p(x)$ al particularizarlo en $x = \alpha$ coincide con el resto que aparece al dividir $p(x)$ entre $x - \alpha$.	
Raíz de un polinomio	Un número real concreto α es una raíz , o un cero , del polinomio p , si al evaluar p en $x = \alpha$ obtenemos el número 0, es decir, si $p(\alpha) = 0$	2 es raíz de $-3x + 6$. 1 y -3 son raíces de $x^2 + 2x - 3$
Factorización de un polinomio	Consiste en expresarlo como producto de otros polinomios de menor grado	$x^5 - 3x^3 - x^2 + 3 =$ $= (x^2 - 3) \cdot (x^3 - 1)$
Fracciones algebraicas	Es una fracción de expresiones polinómicas	$\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$
Resolución de ecuaciones de 1º grado	Son igualdades algebraicas con una sola incógnita y de grado uno.	$\frac{7(x-1)}{3} + \frac{5x}{6} = 1 - \frac{x}{2}$
Resolución de ecuaciones de segundo grado	Igualdades algebraicas con una sola incógnita y elevada al cuadrado.	$-x^2 + 4x + 5$ Cuya solución es: $x_1 = -1; x_2 = 5$
Resoluciones de inecuaciones de 1º grado	Desigualdades algebraicas con una sola incógnitas de grado uno	$\frac{x-3}{3} - \frac{(x-7)}{6} > \frac{4-x}{2}$
Resolución de inecuaciones de 2º grado	Desigualdades algebraicas con una sola incógnita, elevadas al cuadrado.	$x^2 - 6x + 5 > 0$ su solución es el intervalo $(1, 5)$.
Sistemas de ecuaciones lineales, por el método de Gauss	Resolución por el método de Gauss.	$x + 4y + 3z = -1$ $2x - 3y - 2z = 1$ $-x + 2y + 4z = 2$

CAPÍTULO 3: SUCESIONES.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

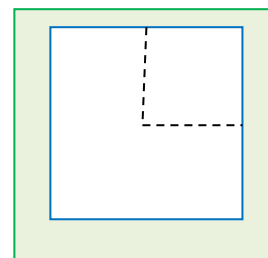
- Escribe los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:
a) 7, 10, 13, 16, ... b) 2, 5, 10, 17, ... c) 1, 3, 5, 7, ... d) 0, 3, 8, 15, 24, ...
- Escribe el término que ocupa el lugar 100 de cada una de las sucesiones anteriores.
- Sabemos que un cuerpo con densidad suficiente que cae libremente sobre la Tierra tiene una velocidad que aumenta 9.8 m/s. Si en el primer segundo su velocidad es de 10 m/s, escribe en tu cuaderno la velocidad en los segundos indicados en la tabla. ¿Observas alguna regla que te permita conocer la velocidad al cabo de 30 segundos? Representa gráficamente esta sucesión.

Tiempo en segundos	1	2	3	30	n
Velocidad en m/s	10				

- Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:
a) $a_n = 3n^2 + 3$ b) $b_n = \frac{2n-1}{n+3}$ c) $c_1 = 1, c_n = 2c_{n-1} + 4$ d) $d_1 = 2, d_2 = 5, d_n = 3d_{n-1} + 2d_{n-2}$
- Escribe la expresión del término general de las siguientes sucesiones:
a) $\{-2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, \dots\}$ b) $\{0, 3, 8, 15, 24, 35, \dots\}$ c) $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ d) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{10}, \frac{7}{17}, \frac{9}{26}, \dots\right\}$
- En una sucesión el primer término es 5 y los demás se obtienen sumando 3 al término anterior. Hallar los 10 primeros términos de la sucesión.
- Escribe el término general de las sucesiones:
a) 6, 18, 54, 162, ... b) 3, 2, 5/3, 6/4, 7/5, ... c) 7, 0.7, 0.07, 0.007, ... d) 2, 5, 8, 11, 15, ...
- Un satélite artificial se puso en órbita a las 10 horas y 30 minutos. Tarda en dar una vuelta completa a su órbita 90 minutos. A) Completa en tu cuaderno la tabla adjunta. B) Escribe una expresión general que te permita conocer la hora en que ha completado la vuelta n -ésima. C) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la hora de la órbita anterior. D) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la primera. E) ¿Cuántas vueltas completas habrá dado 30 días más tarde a las 9 horas?

Nº de órbitas	1	2	3	4	5	6
Hora en la que la ha completado						

- Escribe los 4 primeros términos de las sucesiones siguientes e indica si son progresiones aritméticas, progresiones geométricas o de otro tipo.
a) $a_n = 3 \cdot 3^n$ b) $a_n = 5n + 7$ c) $a_n = 3 \cdot 2^n - 1$ d) $a_n = \frac{(-1)^n + 2n}{3n}$
- En las sucesiones del problema anterior que sean progresiones aritméticas, calcula la suma de los 6 primeros términos.
- En las que sean progresiones geométricas, calcula el producto de los 6 primeros términos y la suma de los 6 primeros términos.
- Calcula la suma de los infinitos términos de la sucesión: 6, 3, 3/2, 3/4, ...
- Tenemos un cuadrado de área 1 en la mano, y lo cortamos por las líneas de puntos como indica la figura. El trozo mayor lo dejamos sobre la mesa y nos quedamos en la mano con el cuadrado, al que volvemos a cortar de la misma forma. Y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Crece o disminuye? Escribe el término general de la sucesión de áreas que tenemos en la mano. ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? ¿Crece el área sobre la mesa o disminuye? Vamos sumando áreas, calcula la suma de estas áreas si hubiéramos hecho infinitos cortes.



- 14. El error de Euler:** Euler fue un gran matemático, pero se encontró con el siguiente problema. Quizás tú seas capaz de ayudarlo a resolverlo. Hizo la siguiente suma, donde r es un número positivo:

$$\dots + \frac{1}{r^n} + \dots + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} + 1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots$$

Primero sumó la primera parte, aplicando la fórmula $S = \frac{a_1}{1-r} : \dots + \frac{1}{r^n} + \dots + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}} = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{r-1}{r}} = \frac{1}{r-1}$

Luego la segunda: $1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots = \frac{1}{1-r}$

Y al sumar ambas obtuvo: $\frac{1}{r-1} + \frac{1}{1-r} = 0$, que evidentemente está mal pues la suma de infinitos números positivos no puede ser 0. ¿Dónde está el error?

- 15.** Calcula la fracción generatriz del número $4.5\widehat{6}1$.

- 16.** Un empresario acude a una entidad financiera para informarse sobre cómo invertir los 6000 € de beneficios que ha tenido en un mes. Le plantean dos opciones: Mantener ese capital durante 5 años al 3.5 % anual o recibir el 5 % del capital durante los dos primeros años y el 3 % los tres años restantes.

¿Qué opción le interesa más?

2. LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

- 17.** Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \frac{n^2 + 2}{3n^2}$

b) $a_n = \frac{2n + 2}{3(n + 1)}$

c) $a_n = \frac{7}{5^n}$

d) $a_n = 4 + \frac{n + 2}{n - 3}$

- 18.** Calcula el límite de las sucesiones siguientes, si es que lo tienen:

a) $a_n = \frac{5n^3 + 2n}{n - 6}$

b) $a_n = \frac{1 - 2n}{1 + 2n}$

c) $a_n = 2 + \frac{7}{5^n}$

d) $a_n = 6 + \frac{5n + 2}{2n - 3}$

- 19.** Escribe una sucesión cuyo límite sea 2, y otra de límite 0.

- 20.** Calcula el límite de las sucesiones siguientes, si es que lo tienen:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2 - 6}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n}{1 + 2n + 7n^3}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 - \frac{7}{n} \right)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 2}{n - 3} - 3 \right)$

- 21.** Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \left(\frac{5n^3 + 2n}{5n^3 - 6} \right)^{2n}$

b) $a_n = \left(\frac{3 + 2n}{5 + 2n} \right)^{3n+2}$

c) $a_n = \left(1 + \frac{7}{n+3} \right)^{n^2}$

d) $a_n = \left(\frac{2n + 2}{2n - 3} \right)^{\frac{n^3 + 1}{n}}$

- 22.** Calcula $1/e$ con tres cifras decimales exactas.

- 23.** Calcula $\sqrt{e}$ con tres cifras decimales exactas.

- 24.** Calcula el logaritmo neperiano de $1/e$ y de $\sqrt{e}$.

- 25.** Resuelve la ecuación $\ln(x + 2) + \ln(3x) = 1$

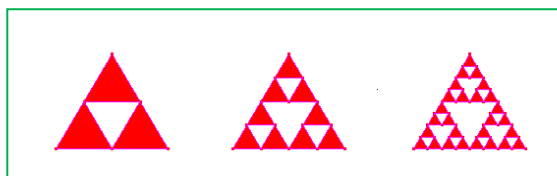
- 26.** Resuelve la ecuación: $8^{x^2} \cdot 2^{3x} = 4^2$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Sucesiones

- Calcula el término que ocupa el lugar 1000 de una progresión aritmética cuyo primer término es igual a 2 y la diferencia es 3.
- El término octavo de una progresión aritmética es 5 y la diferencia 1/2. Halla el primer término y el término 100.
- Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferencia 2.
- Calcula la suma de los múltiplos de 42 comprendidos entre 1000 y 2000.
- La suma de 16 números en progresión aritmética es 548 y el término 16 es 60.5. Halla el primer término.
- El producto de 4 términos en progresión geométrica es 5184 y el primer término es 3. Escribe el resto de términos.

7. Por el alquiler de una casa se acuerda pagar 700 euros al mes durante el primer año, y cada año se aumentará el alquiler en 30 euros mensuales. ¿Cuánto se pagará mensualmente al cabo de 10 años?
8. El quinto término de una progresión geométrica es 48 y el primero es 3. Halla los cinco primeros términos de dicha progresión.
9. Halla x para que $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estén en progresión geométrica.
10. A una cuerda de 350 m de longitud se le dan dos cortes, de modo que uno de los trozos extremos tiene una longitud de 50 m. Sabiendo que las longitudes de los trozos están en progresión geométrica, determina la longitud de cada trozo.
11. Halla la fracción generatriz del número decimal $0.12121212\dots$, como suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada.
12. Se tiene una cuba de vino que contiene 512 litros. El 1 de diciembre se vació la mitad del contenido; al día siguiente se volvió a vaciar la mitad de lo que quedaba, y así sucesivamente todos los días. ¿Qué cantidad de vino se sacó el día 15 de diciembre?
13. Dado un cuadrado de 1 m de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtenemos un nuevo cuadrado, en el que volvemos a efectuar la misma operación, y así sucesivamente. Halla la suma de las infinitas áreas así obtenidas.
14. *Triángulo de Sierpinski*: Vamos a construir un fractal. Se parte de un triángulo equilátero. Se unen los puntos medios de los lados y se forman cuatro triángulos. Se elimina el triángulo central. En cada uno de los otros tres triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente. A la figura formada por iteración infinita se la denomina *Triángulo de Sierpinski*, y es un fractal. A) Imagina que el primer triángulo tiene un área A . Cuando aplicamos la primera iteración, el área es $(3/4)A$. ¿Y en la segunda? Escribe la sucesión de las áreas. ¿Es creciente o decreciente? B) Imagina ahora que la longitud de cada lado del triángulo inicial es L . Escribe la sucesión de las longitudes. ¿Es creciente o decreciente?



Límite de sucesiones

15. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \frac{2n^3 + 2n}{2n^3 - 6}$

b) $a_n = \frac{5n^2 - 4}{n^2 - 6n}$

c) $a_n = \frac{5n^{10} + 2n^2}{3n^{10} + 8n}$

d) $a_n = \frac{n-3}{n+7}$

16. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \frac{2n^2 + 2n}{2n^3 - 6}$

b) $a_n = \frac{5n-4}{n^2 - 6n}$

c) $a_n = \frac{5n^7 + 2n^2}{3n^{10} + 8n}$

d) $a_n = \frac{-3}{n+7}$

17. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \frac{2n^5 + 2n}{2n^3 - 6}$

b) $a_n = \frac{5n^7 - 4}{n^2 - 6n}$

c) $a_n = \frac{5n^{12} + 2n^2}{3n^{10} + 8n}$

d) $a_n = \frac{n^2 - 3}{n+7}$

18. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \frac{\sqrt{2n^5 + 2n}}{2n^3 - 6}$

b) $a_n = \frac{5n^7 - 4}{\sqrt{n^2 - 6n}}$

c) $a_n = \frac{\sqrt{n^{12} + 2n^2}}{3n^{10} + 8n}$

d) $a_n = \frac{\sqrt{n^2 - 3}}{n+7}$

19. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \left(1 + \frac{3}{2n^3 - 6}\right)^{2n+1}$

b) $a_n = \left(1 - \frac{4}{5n^7 - 6n}\right)^{n-2}$

c) $a_n = \left(1 + \frac{2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}}$

20. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \left(\frac{2n^3 + 2n}{2n^3 - 6}\right)^{2n+1}$

b) $a_n = \left(\frac{5n^7 - 4}{5n^7 - 6n}\right)^{n-2}$

c) $a_n = \left(\frac{3n+2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}}$

21. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 - 6}\right)^{2n-3}$

b) $a_n = \left(\frac{n^2 - 4}{n^2 - 6n}\right)^{n-2}$

c) $a_n = \left(\frac{n+2}{n-5}\right)^{\frac{2n^2+3}{3n-1}}$

Exponencial y logarítmica

22. La población de peces de una piscifactoría sigue un modelo de crecimiento exponencial y ha pasado de 100 ejemplares a 1500 en 60 días. ¿Qué población tendrá en 100 días?
23. Ingresamos en un banco 20.000 euros al 3 % de interés compuesto anual. ¿En cuánto tiempo habremos duplicado nuestro dinero?
24. Vanesa ha comprado un coche por 17.000 euros. Se estima que el precio se devalúa un 10 % cada año. ¿A cuánto lo podrá vender al cabo de 5 años? Si tiene un accidente en que el coche queda destrozado cuando tiene 7 años, ¿cuánto le pagará la compañía de seguros?
25. La escala de Richter relaciona la intensidad de un terremoto, x , con su energía y (en ergios): $\log y = 11.4 + 1.5 x$. Calcula la energía de un terremoto: a) de una intensidad 5 en dicha escala, y b) de una intensidad 7.
26. Juan ha visto cucarachas en su casa. Mira de que tipo es y se entera que se triplican cada mes siguiendo un modelo exponencial. Estima que en este momento podría tener 20. Si no hiciera nada, ¿cuántas tendría al cabo de 5 meses?
27. En la fórmula del término n -ésimo de una progresión geométrica, despeja n , aplicando logaritmos.
28. Nieves tiene un gran frasco de perfume muy concentrado de un litro. Saca con una pipeta 10 cm^3 que sustituye con agua. Vuelve a sacar de la mezcla con una pipeta 10 cm^3 que vuelve a sustituir con agua. Así hasta conseguir una mezcla con el 75 % de la inicial. ¿Cuántas operaciones ha debido hacer?
29. Resuelve, tomando logaritmos, la ecuación exponencial: $(0.99)^n = 0.75$.
30. Utiliza la calculadora para estimar el valor de 2^{63} . Estima también $2^{64} - 1$.
31. Resuelve las ecuaciones:

a) $3^{2x-4} = 81$

b) $\sqrt{5^x} = \sqrt[3]{5}$

c) $x^{-1/\sqrt{8}} = 2$

d) $3^{\frac{1}{5}x} = 27$

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es la razón de la siguiente progresión geométrica: $a_n = 7 \cdot 4^{n-1}$?
a) 7 b) 4 c) -1 d) No es una progresión geométrica
2. En la sucesión de múltiplos de 11, el 121 ocupa el lugar:
a) 1 b) 2 c) 11 d) 121
3. La suma de los diez primeros términos de la progresión aritmética: 5, 10, 15, 20, ... es:
a) 220 b) 275 c) 55 d) 250
4. La sucesión 1, $1/5$, $1/25$, $1/125$, ...:
a) Es una progresión geométrica de razón 5 b) Es una progresión aritmética de diferencia 5
c) Es una progresión geométrica de razón $1/5$ d) Es una progresión aritmética de diferencia $1/5$.
5. La solución de la ecuación $5^{\frac{1}{5}x} = 625$ es:
a) 40 b) 8 c) 10 d) 20
6. La progresión aritmética cuyo primer término es 3 y su diferencia 5, tiene como término general:
a) $a_n = 5n$ b) $a_n = 5n + 2$ c) $a_n = 5n - 1$ d) $a_n = 5n - 2$
7. Pepa está preparando el examen de selectividad. Para no dejar toda la materia para el final ha decidido estudiar cada día el doble de páginas que el día anterior. Si el primer día estudió dos páginas, ¿cuántas habrá estudiado al cabo de 5 días?
a) 62 b) 32 c) 1024 d) 128
8. A Luis le han tocado 6000 € en la lotería y decide depositarlos en el banco a un tipo de interés compuesto del 4 %. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 5 años?
a) 6240 € b) 6104 € c) 7832,04 € d) 7299,92 €
9. La sucesión $a_n = \frac{7n^2 - 4n + 3}{n^2 - 6n - 2}$ tiene como límite:
a) 0 b) ∞ c) $-3/2$ d) 7
10. La sucesión $a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$ tiene como límite:
a) e^2 b) ∞ c) e^{-2} d) $-e$

RESUMEN

Concepto	Definición	Ejemplos
Sucesión	Función entre los números naturales, $\mathbb{N}$, y los reales, $\mathbb{R}$.	3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, ...
Progresión aritmética	Sucesión de números reales en la que la diferencia d entre dos términos consecutivos de la sucesión es constante.	2, 5, 8, 11, 14, 17, ...
	Término general: $a_n = a_k + (n - k) d$ Suma de los n primeros términos: $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$a_n = 2 + 3n$ $S_8 = (8/2) \cdot (2 + (2 + 3 \cdot 8)) = 112$
Progresión geométrica	Es una sucesión de números reales en la que el cociente entre cada término y el anterior es constante. Es decir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$.	3, 6, 12, 24, ... 1, 1/2, 1/4, 1/8...
	Término general: $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ Suma: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$, para $r \neq 1$ Suma infinita: $S = \frac{a_1}{1 - r}$, para $0 < r < 1$. Producto: $P_n = \pm \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \rightarrow$ $S_8 = \frac{3(2^8 - 1)}{2 - 1} = 765$ $P_9 = \sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^8)^9} = (3 \cdot 2^4)^9$ $a_n = (\frac{1}{2})^n \rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$
El número e	$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	e es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas: $e \approx 2.71828...$

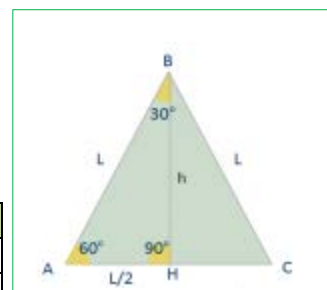
CAPÍTULO 4: TRIGONOMETRÍA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

- Expresa en radianes las siguientes medidas: 60° , 120° , 225° , 330° .
- Expresa en grados sexagesimales: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{10\pi}{6}$ radianes.
- ¿Cuánto suman (en radianes) los ángulos de un triángulo? ¿Cuánto mide un ángulo recto en radianes?
- Para ver la utilidad de los radianes, supongamos un móvil que se mueve en una circunferencia de dos metros de radio con una velocidad de 4 m/s. Calcula su velocidad en rad/s y en grados por segundo. ¿cuántas vueltas da por minuto?
- Un móvil ha recorrido 3 rad en una circunferencia de radio 2 m. ¿Cuánto espacio ha recorrido? ¿Y si la circunferencia tuviera de radio 0.5 m?
- Hemos recorrido 40 grados de una circunferencia de radio 2 m. ¿cuánto espacio hemos recorrido? ¿y si tuviera radio 0.5 m? ¿Es más fácil o más difícil que hacerlo con radianes?
- En la figura se verifica el teorema de *Pitágoras* $a^2 + b^2 = c^2$. Utilizando dicho teorema, demuestra la primera relación fundamental.
- Utilizando las definiciones de las razones trigonométricas, demuestra la segunda relación fundamental.
- Utilizando la definición de las identidades, demuestra:
 - $1 + \tan^2(\alpha) = \sec^2(\alpha)$
 - $1 + \cot^2(\alpha) = \csc^2(\alpha)$
- Comprueba las anteriores relaciones a partir de los ángulos de 30° y 60° .
- Explica por qué el seno y el coseno de 45° son iguales, y por qué la tangente vale la unidad.
- Copia en tu cuaderno, sitúa en el cuadrante que corresponda y expresa en función de un ángulo agudo las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

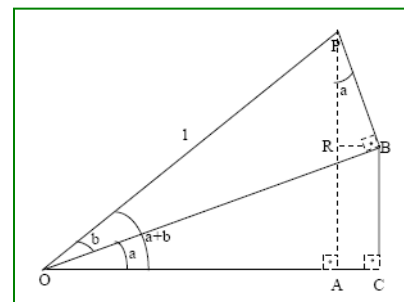
Ángulo	Seno	Coseno	Tangente	Secante	Cosecante	Cotangente
135°						
120°						
210°						
315°						
390°						
3000°						
-150°						



- Utiliza la calculadora para encontrar todos los ángulos positivos menores que 360° cuyo seno es de 0,6.
- Ídem todos los ángulos negativos menores en valor absoluto que 360° cuya tangente vale 4.
- Ídem todos los ángulos comprendidos entre 360° y 720° cuyo coseno vale 0.75.

2. CÁLCULO DE RAZONES DE UNOS ÁNGULOS A PARTIR DE OTROS

- Calcula a partir de las razones trigonométricas de 30° , 45° , 60° y 90° las razones trigonométricas de 75° , 120° , 150° , 105° y 135° .
- Comprueba que las razones trigonométricas de 90° se pueden obtener a partir de las razones trigonométricas de 30° y de 60° .
- Calcula a partir de las razones trigonométricas de 30° , 45° , 60° y 90° las razones trigonométricas de 15° .
- Comprueba que las razones trigonométricas de 30° se pueden obtener a partir de las razones trigonométricas de 90° y de 60° .
- Demuestra las fórmulas de ángulos complementarios usando las fórmulas de la resta. Es decir, verifica que $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$ y las demás usando estas fórmulas. Observa que esta demostración es más general que la que hicimos antes, porque ahora α no tiene por qué ser agudo.
- Calcula las razones trigonométricas de 22.5° y 11.25° a partir de las razones trigonométricas de 45° .
- Comprueba que las razones trigonométricas de 45° se pueden obtener a partir de las razones trigonométricas de 90° .
- Calcula $\cos(3a)$ en función únicamente de $\cos(a)$.
- Calcula $\sin(4a)$ en función únicamente de $\sin(a)$ y $\cos(4a)$ en función de $\cos(a)$.
- Calcula sin hacer uso de la calculadora: a) $\sin(75^\circ) - \sin(15^\circ)$; b) $\cos(15^\circ) - \sin(15^\circ)$



26. Utiliza las transformaciones de sumas en productos para poner en función del seno y coseno del ángulo α :
 a) $\sin(45+\alpha) + \sin(45-\alpha)$; b) $\cos(120+\alpha) + \cos(60+\alpha)$; c) $\cos(270-\alpha) - \cos(90-\alpha)$
27. Simplifica las siguientes expresiones hasta obtener una única razón trigonométrica:
 a) $\frac{\sin(5\alpha) + \sin(3\alpha)}{\cos(5\alpha) + \cos(3\alpha)}$ b) $\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\sin(x+y) + \sin(x-y)}$

3. ECUACIONES Y SISTEMAS TRIGONOMÉTRICOS

28. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas
 a) $\cos(3x) = 0$ b) $\operatorname{tg}(2x) = -1$ c) $\sin(4x) = -1$
29. Expresa en radianes las soluciones de la actividad resuelta ($\sin(2x) = 1/2$) y de la actividad propuesta anterior.
30. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:
 a) $\cos(5x) - \cos(x) = 0$ b) $\sin(2x) - \sin(4x) = 0$
31. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:
 a) $\sin(x) + \cos(x) = 1$ b) $\sin(2x) = 2 \cdot \cos(x)$ c) $\sin^2(x) - \cos^2(x) - \cos(2x) = 1$
32. Resuelve los siguientes sistemas: a)
- $$\begin{cases} x + \sin^2 y = 2 \\ x + \cos^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{3}{4} \\ \cos(x) \cdot \sin(y) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

33. Resuelve los siguientes sistemas: a) $\begin{cases} \sin(x) - \sin(y) = 0 \\ x - y = \pi \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

34. Resuelve los siguientes sistemas: a) $\begin{cases} \cos(x-y) = 0 \\ \cos(x+y) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin(x-y) = 1/2 \\ \cos(x-y) = 1/2 \end{cases}$

4. RESOLUCIÓN GENERAL DE TRIÁNGULOS

35. ¿Qué ocurre cuando la altura cae FUERA del segmento AB ? En otras palabras si tenemos la figura que ves a la derecha. Demuestra el teorema del coseno en ese caso [**Pista:** los únicos cambios aparecen al despejar AD que se suma en vez de restar].
36. Demuestra que el teorema del coseno también vale para ángulos entre 90 y 180 grados. Para ello, procede como sigue:
 a) En la figura que tienes a tu izquierda considera el ángulo α' . Se cumple que $\cos(\alpha') = -\cos(\alpha)$, ¿por qué?
 b) Considera el triángulo rectángulo DBC y pon a en función de CD y DB .
 c) De la misma manera que antes, pon CD y DB en función de b , c y α' .
 d) Sustituye en la expresión para a hasta llegar a una fórmula para a en función de b , c y α' . Al sustituir el $\cos(\alpha') = -\cos(\alpha)$ tienes el resultado.
37. Dibuja un triángulo con $b = 5$, $c = 8$ y el ángulo entre ellos $\alpha = 40^\circ$ (usa una regla y un transportador). Calcula el otro lado con el teorema del coseno y comprueba que coincide con el resultado medido. No te saldrá exactamente por el redondeo y el error de medición pero debería ser muy similar.
38. Un triángulo tiene de lados 3, 5 y 7. Calcula sus ángulos.
39. En un triángulo ABC , los lados AB y AC miden 3 y 2 cm respectivamente. El ángulo β correspondiente al vértice B mide 30 grados.
- a) Utiliza el teorema del coseno para calcular el otro lado. Obtendrás dos soluciones.
 b) Las dos soluciones se deben a que hay dos triángulos ¿serías capaz de dibujarlos?

40. ¿Qué ocurre cuando la altura cae FUERA del segmento AB ? En otras palabras, si tenemos la figura que ves a la derecha. Demuestra el teorema del seno en ese caso [**Pista:** hay que utilizar α' en vez de α y ver la relación entre el seno de ambos ángulos]

41. El ejercicio anterior ya demuestra que el teorema del seno vale para triángulos obtusángulos ¿por qué? Demuestra el teorema para un triángulo rectángulo usando que $\sin 90 = 1$

42. Como antes, dibuja un triángulo con $b = 5$, $c = 8$ y el ángulo entre ellos $\alpha = 40^\circ$. Calcula con el teorema del seno el ángulo opuesto al lado b y calcula, SIN UTILIZAR EL TEOREMA DEL COSENO el otro ángulo y el lado que falta. Comprueba que te sale lo mismo que si hubieras utilizado el teorema del coseno para calcular a .
43. Un triángulo dos ángulos que valen 40 y 60 grados respectivamente. El lado entre ellos es de 8 cm. Calcula todos sus ángulos y lados.
44. En un triángulo ABC , los lados AB y AC miden 3 y 2 cm respectivamente. El ángulo β correspondiente al vértice B mide 30 grados.
- a) Utiliza el teorema del seno para calcular el otro ángulo. Hay dos soluciones porque hay dos ángulos con el mismo seno. Calcula los dos.
- b) Las dos soluciones se deben a que hay dos triángulos, ¿serías capaz de dibujarlos?
45. Un globo está en la vertical entre dos observadores separados por 40 m. El primero lo ve con un ángulo de 30 grados y el segundo con un ángulo de 50 grados, ¿a qué altura está el globo?
46. En un viaje de alumnos de 4º de E.S.O. a Londres, algunos de los viajeros hicieron prácticas de trigonometría. Al conocer que las torres de la Abadía de Westminster tienen 30 metros de altura, decidieron aprovechar sus conocimientos para calcular la altura de la conocida torre Big Ben. Desde un punto intermedio entre ambos edificios se divide el punto más alto de la Abadía con ángulo de 60° , y el Big Ben con un ángulo de 45° . Si la distancia entre las bases de las torres de los dos edificios es de 50 metros, ¿cuál fue el resultado de sus cálculos?, ¿a qué distancia se encontraba de cada edificio?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ángulos y razones trigonométricas

- Sabiendo que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, halla las restantes razones trigonométricas del ángulo α . [Hay dos soluciones].
- Calcula sin hacer uso de la calculadora las demás razones trigonométricas
a) $\sin(\alpha) = 0,2$ (cuadrante II); b) $\cos(\alpha) = -0,3$ (cuadrante III) c) $\tan(\alpha) = 2$ (cuadrante I)
- Sabiendo que $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, y que α es un ángulo del tercer cuadrante, halla el coseno y la tangente de dicho ángulo.
- Si $\tan x = 1/3$, y x es un ángulo del primer cuadrante, calcula: a) $\tan(180^\circ - x)$ b) $\sin(180^\circ + x)$ c) $\cos(360^\circ - x)$
- Sabiendo que $\sin \alpha = 0,5$, y que α es un ángulo del SEGUNDO cuadrante, halla las otras cinco razones de dicho ángulo.

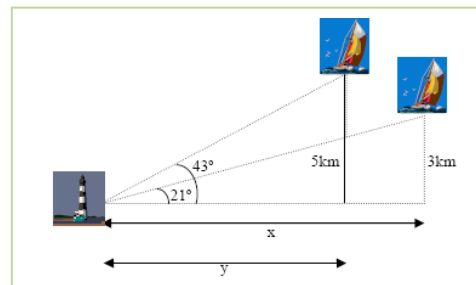
Identidades y ecuaciones trigonométricas

- Resuelve: a) $3\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$ b) $\tan x = \sqrt{2} \cos x$
- Demuestra las siguientes identidades:
a) $(\tan x)(\cos x) = \sin(x)$ b) $\cot^2 x - 1 = \frac{\cos(2x)}{\sin^2 x}$ c) $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
d) $1 + \cos(2x) = \frac{2}{1 + \tan^2 x}$ e) $\cos^2 x = 1 + \cot^2 x$ f) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \cdot \cos 2x = 1 + \sin 2x$
- Demuestra que son ciertas las siguientes igualdades:
a) $\sin a \cdot \sin(a - b) + \cos a \cdot \cos(a - b) = \cos b$; b) $\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
- Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas: a) $\cos 2\alpha - 3\sin \alpha + 1 = 0$ b) $\sin \alpha + \cos \alpha = 0$
- Di si son ciertas o falsas las siguientes igualdades: a) $\frac{1 + \tan^2 x}{1 + \cot^2 x} = \tan^2 x$ b) $\frac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)} = \tan(x)$
- Demuestra que son ciertas las siguientes igualdades: a) $\frac{2\sin x}{\tan 2x} = \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}$ b) $\frac{1 - \sin^4 x}{\cos^2 x} = 2 - \cos^2 x$
- Comprueba que son ciertas las siguientes igualdades: a) $\frac{1 + \tan^2(\alpha)}{1 + \cot^2(\alpha)} = \tan^2(\alpha)$ b) $\frac{\cos^2(\alpha)}{1 + \sin(\alpha)} = 1 - \sin(\alpha)$
- Comprueba que son ciertas las siguientes igualdades: a) $\frac{1 + \tan^2(\alpha)}{1 + \cot^2(\alpha)} = \tan^2(\alpha)$ b) $\frac{\cos^2(\alpha)}{1 + \sin(\alpha)} = 1 - \sin(\alpha)$

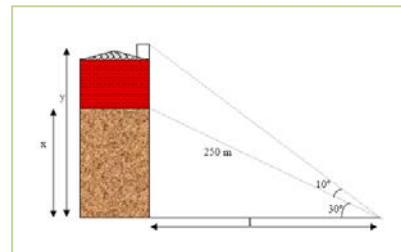
14. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas: a) $\cos x \cdot \cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ b) $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} 2x = 0$
15. Demuestra que son ciertas las igualdades: a) $\cos(\alpha - \beta) - (\operatorname{sen} \beta)(\operatorname{tg} \alpha)(\cos \alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sec \beta}$ b) $\operatorname{sen}(270 - \alpha) + \cos(\alpha) = 0$
16. Resuelve la ecuación trigonométrica $\cos(2\alpha) + 1 = 4 \cos \alpha$ (dando TODAS las soluciones posibles).
17. Resuelve la ecuación trigonométrica $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{tg} x} + \cos^2 x = 1$ dando TODAS las soluciones posibles.
18. Resuelve la ecuación trigonométrica $\cos(2x) + \cos(x) = 0.2$ dando TODAS las soluciones posibles.
19. Resuelve las siguientes ecuaciones
a) $\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x) = 0$ b) $\cos(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$; c) $3 \operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x)$ d) $\operatorname{sen}(2x) = 0.5$
20. Resuelve los siguientes sistemas: a) $\begin{cases} x + \operatorname{sen}^2 y = 2 \\ x + \cos^2 y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(y) = \frac{3}{4} \\ \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(y) = \frac{1}{4} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \cos(x) + \cos(y) = 1 \\ \cos(x + y) = 1 \end{cases}$
21. Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\operatorname{sen}(3x) - \operatorname{sen}(30^\circ) = 0$, c) $\operatorname{sen}(2x) = 2 \cdot \cos(x)$
22. Simplifica las siguientes expresiones: a) $(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))^2 + (\operatorname{sen}(x) - \cos(x))^2$ b) $\frac{\operatorname{sen}(2a) \cdot \cos(a)}{\operatorname{sen}(a) \cdot (1 + \cos 2a)}$
c) $\frac{\operatorname{sen}^3(x) + \operatorname{sen}(x) \cdot \cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}$ d) $\frac{\operatorname{tg}(a)}{\operatorname{tg}(2a) - \operatorname{tg}(a)}$ e) $\frac{\operatorname{sen}(x - y) - \operatorname{sen}(x + y)}{\cos(x + y) - \cos(x - y)}$

Problemas de resolución de triángulos

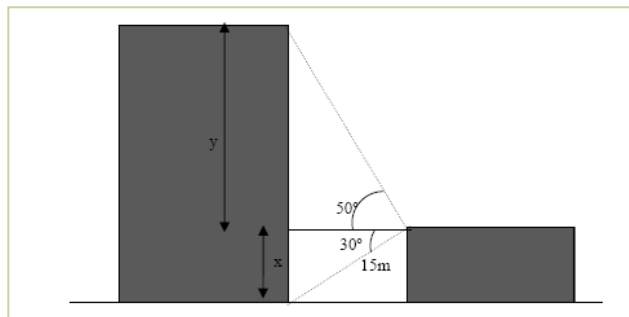
23. Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables, que forman con la antena ángulos de 36° y 48° . Los puntos de sujeción de los cables están alineados con el pie de la antena y distan entre sí 98 metros. Calcula la altura de la antena.
24. Calcula los lados y los ángulos del triángulo ABC , rectángulo en A , del que conocemos el cateto $AC = 15\text{cm}$. y la altura relativa a la hipotenusa $AD = 12\text{cm}$.
25. Calcular el área de un heptágono regular inscrito en una circunferencia de 35 cm de perímetro. Calcular el radio de la circunferencia inscrita.
26. En un tramo de carretera la inclinación es del 5 % (sube 5 m en 100 m). Calcular el ángulo que forma con la horizontal la carretera. Sabemos que hemos subido 100 m, ¿Cuánto hemos andado por la carretera?
27. Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42° ¿bajo qué ángulo se ve colocándose al doble de distancia?
28. En un triángulo conocemos dos de sus ángulos y un lado: $A = 55^\circ$, $B = 98^\circ$, $a = 7.5\text{ cm}$. Resuélvelo.
29. En un triángulo conocemos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos $A = 35^\circ$, $b = 20\text{ cm}$, $c = 14\text{ cm}$. Resuélvelo.
30. Halla los ángulos de un triángulo del que se conocen los tres lados: $a = 37\text{ cm}$, $b = 42\text{ cm}$, $c = 68\text{ cm}$.
31. Dos barcos parten de un puerto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127° . El primero sale a las 10 h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11 h 30 min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 km. ¿Podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde? (nudo = milla/hora; milla = 1850 m).
32. Dos amigos están en una playa a 150 m de distancia y en el mismo plano vertical que una cometa que se encuentra volando entre ambos. En un momento dado, uno la ve con un ángulo de elevación de 50° y el otro con un ángulo de 38° . ¿Qué distancia hay desde cada uno de ellos a la cometa?
33. Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo, mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 70 metros. El cable más corto mide 90 metros y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 42° . Calcula:
a) La medida del otro cable.
b) La distancia del globo al suelo.
34. Desde un faro F se ve un barco A con ángulo de 43° con la costa, y el barco B con 21° . El barco B está a 3km de la costa y el A a 5km. Calcula distancia entre los barcos.
35. Una finca tiene forma triangular. Dos de sus lados miden 140 m y 200 m respectivamente, y el ángulo comprendido entre ambos es de 35° . Calcula el perímetro y la superficie de la finca.
36. Calcula el área y el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 3 cm.



37. Calcula la altura del edificio:
 38. Dos personas A y B distan entre sí 200m y ven un globo que está situado entre ambas. La primera persona lo ve con un ángulo de 30° y la segunda con un ángulo de 60° .
 a) ¿A qué distancia está B del globo?
 b) ¿A qué altura está el globo?
 c) Una persona que esté situada dentro del globo ¿Con qué ángulo ve a A y B ?



39. Calcula la altura de la torre grande a partir del siguiente dibujo.
 40. Deseamos medir la altura de un edificio. Si lo observamos desde un punto A lo vemos con un ángulo de 50° . Ahora bien, si lo contemplamos desde 20m más lejos el ángulo es de 40° . ¿Cuál es la altura del edificio? ¿A qué distancia está el punto B de dicho edificio?
 41. Calcula todos los ángulos de un triángulo de lados 4,5 y 6. ¿Hay más de una solución? Si hay más de una, calcúlalas todas, si hay una sola, explica por qué.
 42. Justifica que hay EXACTAMENTE DOS triángulos con lados $a = 4$, $b = 5$ y ángulo α (el opuesto al lado a) igual a 45° .
 43. Resuelve los siguientes triángulos:
 a) $\alpha = 45^\circ$, $b = 50\text{m}$, $a = 40\text{m}$; b) $\beta = 30^\circ$, $a = 5\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$
 c) $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $b = 20\text{m}$ d) $\gamma = 45^\circ$, $b = 10\text{m}$, $c = 6\text{m}$; e) $a = 5\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$, $c = 4\text{cm}$
 44. Comenzamos en una ciudad A y observamos un cartel. La ciudad B está a 50 Km y la ciudad C a 40 Km. Medimos el ángulo que forman las dos carreteras y resulta ser de 60° . ¿A qué distancia está B de C ? Desde la ciudad B ¿Con qué ángulo se ven las otras dos ciudades? [En otras palabras: si consideramos el triángulo ABC , ¿cuánto vale el ángulo β que corresponde al vértice B ?]



AUTOEVALUACIÓN

- Calcula las siguientes razones trigonométricas sin hacer uso de la calculadora.
 - $\text{sen}(-750^\circ)$
 - $\text{tg}(570^\circ)$
 - $\cos(20\pi/3)$
- A partir de las razones trigonométricas de la suma calcula las siguientes razones trigonométricas:
 - $\text{sen}(105^\circ)$
 - $\cos(75^\circ)$
- Sea un triángulo del que conocemos los siguientes datos $a = 10\text{ cm}$, $b = 20\text{ cm}$, $\hat{A} = 30^\circ$. Calcula los demás datos del triángulo. Calcula el área del triángulo
- Un buitre vuela a 120 m de altura y formando un ángulo con la horizontal respecto de nosotros de 60° . En la misma dirección, pero formando un ángulo de 30° vuela una perdiz a 100 m de altura. Si el buitre quiere comerse la perdiz, pero sólo lo consigue si la distancia entre ambos es menor de 150 m. ¿Puede el buitre cazar a la perdiz? ¿A qué distancia están?
- Calcula sin utilizar la calculadora el resto de razones trigonométricas (seno, coseno) de α , sabiendo que $\text{tg}(\alpha) = 1/2$ y $\alpha \in 3^\text{er}$ cuadrante.
- Resuelve las siguientes ecuaciones:
 - $6 \cdot \cos^2(x/2) + \cos(x) = 1$
 - $\text{sen}(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$
- Resuelve los siguientes sistemas:
 - $$\begin{cases} \text{sen}(x) + \text{sen}(y) = 1 \\ x + y = \pi \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} \text{sen}(x) + \text{sen}(y) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \text{sen}(x) - \text{sen}(y) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \text{sen}(x) + \text{sen}(y) = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$
- Demuestra las siguientes igualdades:
 - $\cos(x+y+z) = \cos(x) \cdot \cos(y) \cdot \cos(z) - \cos(x) \cdot \text{sen}(y) \cdot \text{sen}(z) - \text{sen}(x) \cdot \cos(y) \cdot \text{sen}(z) - \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(y) \cdot \cos(z)$
 - $\frac{\text{sen}^2(2a)}{(1 - \cos^2 a) \cdot \cos(a)} = 4 \cdot \cos(a)$
- Calcula el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30 cm de radio. Calcula su área
- En las señales de tráfico que indican la pendiente de la carretera la información que nos dan es el porcentaje de subida en función del avance del coche. Calcula el ángulo para una pendiente del 15 %.

RESUMEN

Radián	Es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide exactamente lo mismo que el radio utilizado para trazarlo. Se denota por <i>rad</i> . Nº de radianes de un ángulo completo = 2π rad	90° son $\pi/2$ rad
Razones trigonométricas de un ángulo agudo	$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$ $\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$ $\tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$	$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{3}{5}, \cos(\beta) = \frac{4}{5}$
Relaciones fundamentales	$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$ $\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$	
Otras razones trigonométricas	$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \cotan \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$	$\operatorname{cosec} 90^\circ = 1$ $\sec 90^\circ$ No existe $\cotan 45^\circ = 1$
Fórmulas de la suma	$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \operatorname{sen}(b)$ $\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)$	$\operatorname{sen}(75) = \operatorname{sen}(45) \cos(30) + \cos(45) \operatorname{sen}(30) =$ $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$
Ángulo doble	$\begin{cases} \operatorname{sen}(2a) = 2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(a) \\ \cos(2a) = \cos^2(a) - \operatorname{sen}^2(a) \end{cases}$	$\cos(60) = \cos^2(30) - \operatorname{sen}^2(30)$ $= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$
Ángulo mitad	$\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(a)}{2}} \\ \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(a)}{2}} \end{cases}$	$\operatorname{sen}(30) = \sqrt{\frac{1 - \cos(60)}{2}}$ $= \sqrt{(1 - 0.5)/2} = \sqrt{0.25} = 0.5$
Teorema del coseno	En un triángulo ABC cualquiera: $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cos \alpha$	Si $b = 5$, $c = 6$ y el ángulo entre ellos es 30 grados, el lado a es $a^2 = 5^2 + 6^2 - 60 \cos 30 = 3.01$
Teorema del seno	En un triángulo ABC cualquiera: $\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{c}$	Si $b = 5$ y $a = 3.01$ el ángulo α cumple $\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{3.01} = \frac{\operatorname{sen}(30)}{5}$ y da $\alpha = 17.52^\circ$
Resolución general de triángulos	En general cualquier triángulo se puede resolver si conocemos tres de los seis datos (hay tres lados y tres ángulos). Se aplican los teoremas del seno y del coseno y que la suma de sus ángulos son 180 grados.	Si los datos originales son $b = 5$, $c = 6$ y $\alpha = 30$ el teorema del coseno nos da $a = 3.01$, el teorema del seno $\alpha = 17.52^\circ$ y la suma da $\beta = 132.48^\circ$.

CAPÍTULO 5: GEOMETRÍA ANALÍTICA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. VECTORES

- Dados los puntos $P = (2, 2)$, $Q = (1, 0)$ y $R = (-2, 3)$ y los vectores $\vec{v} = (1, -1)$, $\vec{w} = (0, -2)$ calcula, indicando si el resultado es punto o vector:
 - $\overrightarrow{QP}$
 - $3\vec{v} - 2\vec{w}$
 - $\vec{v} - \overrightarrow{RP}$
 - $P + \vec{v}$
 - $R + \overrightarrow{PQ} + \vec{w}$
- Dados tres puntos genéricos, $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ y $R = (r_1, r_2)$, demuestra:
 - $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
 - $\overrightarrow{PQ} = (-1)\overrightarrow{QP}$
 - $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$
 - $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PQ}$
- Calcula el producto escalar de los siguientes vectores.
 - $(1, 2) \cdot (-2, 3)$
 - $(1, 2) \cdot (0, 0)$
 - $(1, 2) \cdot (-2, 1)$
 - $(3, 2) \cdot (1, 3)$
 - $(-1, -2) \cdot (2, 0)$
 - $(5, -1) \cdot (3, -4)$
 - $(0, 1) \cdot (-2, 0)$
 - $(3, 4) \cdot (-4, 3)$
- Considera tres vectores genéricos $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2)$ así como un escalar genérico k . Demuestra las propiedades 1 a 3 del producto escalar.
- En el problema anterior que dice "Calcula todos los lados y ángulos del triángulo $A(1, 2)$, $B(4, 2)$ y $C(5, 5)$, repite el cálculo de ángulos cambiando el orden en que se toman los puntos $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CB}$. ¿Cómo cambian los ángulos? ¿Por qué?
- Calcula todos los lados y los ángulos de los siguientes triángulos de dos maneras. Primero con el método anterior y luego por el que se indica:
 - $A = (1, 1)$, $B = (1, 4)$, $C = (2, 2)$. Calcula los tres lados y luego usa trigonometría.
 - $A = (1, -1)$, $B = (2, 4)$, $C = (2, 2)$. Calcula los lados a y c y el ángulo β y luego usa trigonometría.
 - $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$, $C = (3, -2)$. Calcula el lado a y los ángulos β y γ y luego usa trigonometría.
 - $A = (0, 1)$, $B = (1, 4)$, $C = (2, 3)$. Calcula tres datos cualesquiera (los que sean, tres lados, dos ángulos y un lado...) y luego usa trigonometría.
- Calcula el área del triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (2, 2)$ y $C = (4, 5)$. [Pista: Puedes calcular todos los lados y ángulos. La altura se calcula con trigonometría].
- Calcula el área del rectángulo $ABCD$ con $A = (1, 2)$, $B = (2, 4)$, $C = (5, 3)$ y $D = (4, 1)$.
- Calcula el área del rombo $ABCD$ con $A = (1, 1)$, $B = (4, 0)$, $C = (3, 3)$ y $D = (0, 4)$.
- Calcula un vector que forme 60 grados con el vector $(1, 0)$. Para ello, procede como sigue. Supón que el vector sea de la forma $(x, 1)$ y plantea la ecuación $\cos 60^\circ = \frac{(x, 1) \cdot (1, 0)}{\|(x, 1)\| \|(1, 0)\|}$. Despejando x obtendrás el vector. ¿Serías capaz de calcular un vector UNITARIO (de módulo 1) que forme un ángulo de 60° con el vector $(1, 0)$?
- Considera un hexágono regular $ABCDEF$ de centro el origen. Si el punto B es el $(1, 0)$, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos A y C ? Calcula el ángulo del hexágono.
- $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$ y $C = (2, 8)$ son vértices (consecutivos) de un paralelogramo $ABCD$. Calcula el vértice D y el ángulo ABC .
- Mismo problema que el anterior con $A = (2, 4)$, $B = (3, 5)$ y $C = (4, -1)$. ¿Se puede resolver el problema sean cuales sean A , B y C ?
- Sean $A = (2, 2)$ y $B = (4, 6)$ dos vértices de un cuadrado. Calcula los otros dos vértices y el área del cuadrado. (Ayuda: Hay dos soluciones, las dos con la misma área).
- ¿Son los siguientes pares de vectores una base ortogonal? Justifica la respuesta.
 - $(1, 2)$ y $(1, -2)$,
 - $(1, -2)$ y $(2, 1)$
 - $(0, 1)$ y $(100, 0)$
 - $(1, 0)$ y $(0, 0)$
- Calcula un vector que forme con $(1, 4)$ una base ortogonal.
- Calcula un vector perpendicular a $(1, 2)$ que tenga módulo 3 [Pista: calcula un vector perpendicular cualquiera. Al dividir por su módulo tendrá módulo 1. Basta multiplicar por la constante 3].
- ¿Forman los siguientes pares de vectores una base ortonormal? Justifica la respuesta.
 - $(1, 0)$ y $(0, 1)$,
 - $(1, -2)$ y $(2, 1)$
 - $(0, 1)$ y $(100, 0)$
 - $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1)$

19. Si $A = (1, 1)$ y $B = (2, 3)$ son dos vértices de un cuadrado, calcula los otros dos vértices y el área del cuadrado (*Cuidado: hay dos soluciones, las dos con la misma área*).
20. Dado el vector $\vec{v} = (1, -2)$ calcula una base ortonormal que contenga a un múltiplo suyo. ¿Hay más de una solución al problema anterior? En caso afirmativo, calcúlalas todas.

2. RECTAS Y PROBLEMAS MÉTRICOS

21. Dados los puntos $A = (1, 4)$ y $B = (-3, 6)$ calcula su punto medio:
- Construyendo el vector que los une.
 - Con la fórmula. Comprueba que sale lo mismo.
22. Considera los puntos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$. Demuestra que con las dos maneras de calcular el punto medio sale lo mismo.
23. Calcula una recta perpendicular a $r \equiv x + 2y = 5$ que pase por $(2, 0)$. Exprésala al menos en tres formas y dibújala.
24. Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$ y $s \equiv 2x + y = 2$. Estudia su posición relativa y calcula sus puntos de corte si los hubiera.
25. Consideremos la recta $r \equiv (1, 3) + \lambda(1, -2)$.
- Calcula su pendiente.
 - ¿Pertenece el punto $(2, 2)$ a la recta? ¿Y el punto $(0, -2)$?
 - Da al menos tres puntos de la recta.
 - Dibuja la recta.
26. Suponte que la distancia de un punto a una recta es 0. ¿Qué significa ese resultado? Aplícalo a la recta $2x - y = 1$ y el punto $(2, 3)$.
27. Considera la recta $x + 2y = 3$ y el punto $A = (2, 3)$. Calcula el punto Q de mínima distancia y el simétrico de A respecto de la recta.
28. Calcula la distancia al origen de las rectas que se indican.
- $2x + y = 3$
 - $(x, y) = (1, -2) + \lambda$
 - $y = \frac{x}{2}$
29. Calcula la distancia del punto $(1, 2)$ a las rectas que se indican.
- $x + 3y = 4$
 - $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$
 - $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1}$
 - $y - 2 = 4(x + 1)$
30. Una recta pasa por el punto $(3, 1)$ y forma con los semiejes positivos un triángulo de área seis unidades. Calcula dicha recta.
31. Calcula el punto de simétrico de $A = (1, 2)$ respecto a la recta $y = 3$.
32. Consideremos un pentágono irregular $ABCDE$ formado por los puntos $A = (-2, 3)$, $B = (1, 4)$, $C = (3, 3)$, $D = (2, 2)$ y $E = (-1, 1)$. Dibújalo y calcula su área [Te recomendamos dividirlo en figuras más manejables].
33. Consideremos un cuadrado $ABCD$. El punto A es $(1, 2)$ y los puntos B y C están sobre la recta $y - x = 3$. Calcula los cuatro vértices del cuadrado y su área.
34. Determina las mediatrices de los segmentos de extremos A y B . Representálo gráficamente.
- $A = (2, 7)$ y $B = (6, 3)$
 - $A = (-3, 5)$ y $B = (0, -3)$
 - $A = (-1, 0)$ y $B = (7, -4)$
35. Determina las mediatrices de los segmentos de extremos A y B . Representálo gráficamente.
- $A = (0, 7)$ y $B = (0, 3)$
 - $A = (-3, 0)$ y $B = (6, 0)$
 - $A = (-5, 0)$ y $B = (0, -5)$
36. Determina las bisectrices de las rectas r y s . Representálo gráficamente.
- $r: x + 2y - 5 = 0$ y $s: 2x - y - 8 = 0$
 - $r: 3x + 5y - 2 = 0$ y $s: 4x - 6y - 1 = 0$
37. Determina las bisectrices de las rectas r y s . Representálo gráficamente.
- $r: x = 0$ y $s: y = 0$
 - $r: x + y = 0$ y $s: x - y = 0$
38. Dado el triángulo de vértices ABC , siendo $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$ y $C = (4, 4)$, determina las ecuaciones de:
- Sus mediatrices y las coordenadas del circuncentro
 - Sus bisectrices y las coordenadas del incentro
 - Sus alturas y las coordenadas del ortocentro
 - Sus medianas y las coordenadas del baricentro

3. CÓNICAS

39. Una elipse tiene focos en (1, 2) y en (5, 2) y pasa por el punto (0, 2). Calcula su ecuación y dibújala. ¿Cuánto vale su excentricidad?

40. Calcula todos los elementos de las elipses siguientes y dibújalas.

a. $\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

b. $4x^2 + 9y^2 - 8x = 0$

41. Considera la hipérbola $x^2 - y^2 + 2y = 0$. Calcula:

- Su ecuación reducida.
- Su centro y focos.
- Sus asíntotas.

42. Calcula todos los elementos de las hipérbolas siguientes y dibújalas.

a. $(x+1)^2 - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

b. $4x^2 - y^2 - 8x + 2y = 0$

43. Una hipérbola horizontal tiene centro en el (1, 2) y excentricidad 2. Sabiendo que pasa por el punto (4, 2), ¿cuál es su ecuación? [Pista: el parámetro a lo puedes sacar simplemente del dibujo].

44. El vértice de una parábola vertical con las ramas hacia arriba es el punto (2, -1). Sabiendo que pasa por el punto (1, 0) escribe la ecuación de la parábola, dibújala y calcula su foco.

45. Identifica las figuras y dibújalas calculando su foco o focos.

a. $2y^2 + 3x = 0$

b. $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

46. Identifica las figuras y dibújalas. En el caso de la hipérbola, calcula sus asíntotas.

a. $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

b. $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

47. Dibuja con *Geogebra* o cualquier programa equivalente las siguientes cónicas. En función del dibujo, clasifícalas en elipses, parábolas o hipérbolas.

a. $x^2 + 3xy = 3$

c. $x^2 + 2xy + y^2 - 3y = 0$

e. $x^2 - 2xy - y^2 + 4 = 0$

b. $2x^2 + 4xy + y^2 = 1$

d. $3x^2 - 6xy + y^2 - 2x = 0$

f. $4x^2 + xy + y^2 - 2 = 0$

48. Dibuja con *Geogebra* o un programa equivalente las siguientes elipses y calcula sus ejes mayor y menor. ¿Serías capaz de calcular su excentricidad? [Pista: hazlo con el ordenador, cortando la elipse con la recta focal].

- Una elipse con focos en (1, 3) y en (3, 1), que pasa por el origen.
- Una elipse con focos en (-1, 0) y en (-5, 2) que pasa por el (-1, 2).

49. Dibuja, con *Geogebra* o un programa equivalente las siguientes hipérbolas y calcula sus ejes mayor y menor.

- Una hipérbola con focos en (1, 3) y en (3, 1) que pasa por el (2, 0).
- Una hipérbola con focos en (-1, 0) y en (-5, 2) que pasa por el (-1, 2).

50. Dibuja, con *Geogebra* o un programa equivalente las siguientes parábolas y calcula su eje de simetría y su vértice.

- Una parábola con foco en (1, 3) y recta directriz $y = x$.
- Una parábola con foco en (-1, 1) y recta directriz $3x + y = 4$.

51. Calcula los focos y los parámetros a , b y c de las siguientes hipérbolas equiláteras y dibújalas:

a. $xy = 9/2$

b. $xy = 32$

c. $xy = 24$

d. $xy = 1$

52. Calcula la ecuación de la hipérbola equilátera que tiene por focos (2, 2) y (-2, 2), así como sus parámetros a y b y su excentricidad. Dibújala.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Vectores

- Dados los puntos $P = (2, -2)$, $Q = (1, 1)$ y $R = (0, -2)$ y los vectores $\vec{v} = \overrightarrow{(2, -1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(1, 0)}$ calcula, indicando si son puntos o vectores:
 - $\overrightarrow{PQ}$
 - $Q + \overrightarrow{PQ} - \vec{w}$
 - $2\vec{v} - \vec{w}$
 - $R + \vec{v}$
 - $\vec{v} - \overrightarrow{RQ}$
 - $\overrightarrow{QP} - 2\vec{w}$
- Dados los puntos $P = (2, 2)$, $Q = (1, 0)$ y $R = (-2, 3)$ y los vectores $\vec{v} = \overrightarrow{(1, -1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0, -2)}$, calcula, indicando si son puntos o vectores:
 - $\overrightarrow{QP}$
 - $R + \overrightarrow{PQ} + \vec{w}$
 - $3\vec{v} - 2\vec{w}$
 - $P + \vec{v}$
 - $\vec{v} - \overrightarrow{RP}$
 - $P + \overrightarrow{QP} - 2\vec{v}$
- Calcula el módulo del vector que une $P = (1, 3)$ y $Q = (4, -3)$, ¿qué relación tiene con la distancia entre los puntos?
- Divide el segmento formado por los puntos $P = (1, 3)$ y $Q = (4, -3)$ en tres partes iguales.
- Calcula una base ortogonal que contenga al vector $(1, -4)$.
- Calcula una base ortonormal que contenga a un vector paralelo a $\vec{v} = (-2, 3)$
- Calcula un vector perpendicular a $\overrightarrow{(1, -2)}$ y que tenga módulo 4.
- Tres puntos de un rombo $ABCD$ son $A = (2, 1)$, $B = (4, 5)$ y $C = (2, 9)$. Calcula:
 - El ángulo que corresponde al vértice A .
 - El perímetro (suma de lados) del rombo.
 - El punto D .
- Calcula el ángulo que forman las diagonales del rectángulo $ABCD$ siendo $A = (1, 2)$, $B = (1, 8)$, $C = (4, 8)$. [El punto D puedes calcularlo].

Rectas

- Calcula la recta que es paralela a $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3}$ y pasa por el punto $(0, 1)$. Exprésala al menos en tres formas y dibújala.
- Calcula la recta que es paralela a $r \equiv 2x - 3y = 0$ y pasa por el punto $(1, 2)$. Exprésala al menos en tres formas y dibújala.
- Calcular una recta perpendicular a $r \equiv y = 2x - 1$ que pase por $(2, -1)$. Exprésala al menos en tres formas y dibújala.
- Sean las rectas $r \equiv (1, 1) + \lambda(-1, 2)$ y $s \equiv x + y = 3$. Estudia su posición relativa y calcula sus puntos de corte si los hubiera.
- Sean las rectas $r \equiv (0, -2) + \lambda\overrightarrow{(1, 4)}$ y $s \equiv 4x - y - 2 = 0$. Estudia su posición relativa y calcula sus puntos de corte si los hubiera.
- Consideremos la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3}$.
 - Calcula su pendiente.
 - ¿Pertenece el punto $(0, 5)$ a la recta? ¿Y el $(1, 3)$?
 - Da al menos tres puntos de la recta.
 - Dibuja la recta.
- Consideremos la recta $y - 2x = 1$
 - Calcular su pendiente y vector director.
 - Dar una recta perpendicular a ella que pase por $(1, 2)$. Exprésala en al menos cuatro formas.
- Sean los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (3, 0)$
 - Calcula el vector que los une.
 - Calcula la recta que pasa por ambos y exprésala en tres formas distintas.
 - ¿Pertenece el punto $(2, 1)$ a la recta?, ¿y el $(3, 1)$?

18. Sea la recta $r \equiv y = x - 2$.
- Calcula una recta perpendicular a ella y pase por $(2, 1)$.
 - Calcula una recta que pase por $(-1, 3)$ y sea paralela a r .
19. Halla la posición relativa de las rectas $x + y = 0$ y $s \equiv (x, y) = (1, 2) + \lambda(1, 1)$ así como el ángulo que forman.
20. Calcula la distancia del punto $(2, -1)$ a la recta $y + x = 1$.
21. Calcula la distancia al origen de las siguientes rectas:
- $(x, y) = (1, 1) + \lambda(1, 2)$
 - $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3}$
 - $y = 2x + 3$
22. Calcula la distancia al punto $(1, -2)$ de las siguientes rectas.
- $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$
 - $2x + y = 3$
23. Sea la recta $s : x - 2y + 1 = 0$
- Calcula una recta que sea perpendicular a ella y pase por $(1, 1)$.
 - Calcula una recta que pase por $(0, 1)$ y sea paralela a s .
24. Halla la posición relativa de las rectas $r : \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{-1}$ y $s : (x, y) = (1, -2) + \lambda(1, 1) = 0$ así como el ángulo que forman.
25. Tres puntos de un rectángulo $ABCD$ son $A = (2, 1)$, $B = (0, 7)$ y $D = (5, 2)$. Se pide:
- Comprobar que el ángulo B es de 90° .
 - Calcular las longitudes de los lados AB , CD y de la diagonal BD , del rectángulo.
 - Calcular el punto C .
26. Calcula la distancia del punto $(1, 4)$ a la recta $y - x = 1$
27. Tres puntos de un triángulo son $A = (2, 1)$, $B = (2, 8)$ y $C = (4, -1)$. Calcular sus lados y ángulos.
28. Sea la recta $s : x + y = 4$.
- Calcula una recta perpendicular con ella y pase por $(1, 1)$.
 - Calcula la distancia de esa recta al punto $(2, 3)$.
29. Halla la posición relativa de las rectas $r : 3x + y = 5$ y $s : (x, y) = (1, -2) + \lambda(-1, 3) = 0$ así como el ángulo que forman.
30. Calcula la recta perpendicular a $y = 2x - 4$ que pase por el punto medio de $A = (1, 3)$ y $B = (3, -1)$
31. En un paralelogramo $ABCD$ vienen dados por $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$ y $C = (3, -1)$.
- Calcula el ángulo B (entre BA y BC).
 - Calcula la ecuación de la recta que pasa por A y C (la diagonal del paralelogramo).
 - Calcula el perímetro de la figura.
 - Calcula el punto D .
32. Ya sabes que la mediatriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados. Escribe la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A = (2, 5)$ y $B = (4, -1)$.
33. Recordemos que el circuncentro de un triángulo es el punto de corte de las mediatrices de sus lados. Calcula el circuncentro del triángulo $A = (1, 2)$, $B = (1, 6)$ y $C = (3, 8)$ escribiendo las ecuaciones de las tres mediatrices.
34. Recordemos que el baricentro de un triángulo es el punto de intersección de las medianas (la mediana es la recta que va desde un vértice al punto medio del lado opuesto). Sabiendo esto, calcula el baricentro del triángulo $A = (-2, 2)$, $B = (1, 4)$ y $C = (1, 0)$, escribiendo las ecuaciones de las tres medianas.
35. Ya sabes que la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo. Escribe la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por las rectas $y = 2x + 3$, y $3x + 5y = 1$. ¿Cuántas hay? ¿Cómo son?

Cónicas

36. Calcula la circunferencia que pasa por el punto $A = (1, 1)$ y tiene por centro a $C = (-1, 3)$

37. Identifica las figuras y dibújalas

a. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ b. $\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$ c. $y^2 - 2x = 0$ d. $x^2 - 2x + y^2 = 0$

38. Calcula la circunferencia que pasa por los puntos $A = (1, 4)$, $B = (3, 4)$ y $C = (5, 5)$.

39. Calcular la ecuación de una hipérbola con centro en $(-1, 1)$ y radios 8 y 5. Dibuja dicha hipérbola

40. Identifica las figuras y dibújalas

a. $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ b. $\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$ c. $y^2 - 2x = 0$ d. $x^2 - 2x + y^2 = 0$

41. Identifica las figuras y dibújalas.

a. $x^2 + 2y^2 - 4x = 0$ b. $x^2 - y^2 + 2y = 0$

42. Calcula la circunferencia que pasa por $A = (1, 4)$, $B = (3, 6)$ y cuyo centro es su punto medio.

43. Considera la hipérbola equilátera $xy = 50$. Calcula sus focos, excentricidad y asíntotas y dibújala.

44. Dibuja con *Geogebra* o cualquier programa equivalente las siguientes cónicas. En función del dibujo, clasifícalas en elipses, parábolas o hipérbolas.

a) $x^2 - 3xy = 2$ c. $x^2 + xy + y^2 - y = 0$ e. $2x^2 - 4xy + y^2 + 4 = 0$
b) $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$ d. $3x^2 - 6xy + 4y^2 - 2x = 0$ f. $4x^2 + xy + y^2 - 2 = 0$

45. Una elipse tiene focos en $(1, 1)$ y en $(4, 1)$ y pasa por el punto $(1, 0)$. Calcula su ecuación y dibújala. ¿Cuánto vale su excentricidad?

46. Una elipse tiene por centro el punto $(1, -1)$ y pasa por los puntos $(5, -1)$ y $(1, 1)$. Sabiendo que su radio mayor es 4:

- Da su ecuación y dibuja la elipse.
- Calcula sus focos y excentricidad.

47. Una hipérbola equilátera con centro el origen pasa por el punto $(1, 3)$. Calcula sus focos y dibújala.

48. Sabiendo que las asíntotas de una hipérbola son $y = 2x$ e $y = -2x$ y que pasa por el punto $(2, 0)$ calcular la ecuación de dicha hipérbola.

49. Una hipérbola equilátera tiene como ecuación $xy = 50$. Calcula sus focos.

AUTOEVALUACIÓN

1. Comenzamos en el punto $(1, 1)$ y nos movemos primero con el vector $\vec{v} = (1, -3)$ y después con el vector $\vec{w} = (-4, 5)$.
 - a. ¿En qué posición estamos al final?
 - b. Si quisiéramos hacer los dos pasos en uno, ¿qué vector seguiríamos?
2. Dados los puntos $P = (2, 2)$, $Q = (1, 0)$ y el vector $\vec{v} = (1, -1)$, calcula, indicando si son puntos o vectores:
 - a. $\overrightarrow{QP}$
 - b. $2\overrightarrow{PQ} + 3\vec{v}$
 - c. $P + 2\vec{v}$
3. Realiza las siguientes operaciones:
 - a. $(1, 2) \cdot (1, -2)$
 - b. $(2, -3) \cdot [(0, 2) - (1, -1)]$
4. Calcula la recta que es paralela a $r \equiv 2x + y = 5$ y pasa por el punto $(2, -1)$. Exprésala al menos de cuatro formas, calcula su pendiente y dibújala.
5. Calcula el ángulo entre las rectas $r \equiv x + 2y = 5$ y $y = x + 3$
6. Sean las rectas $r \equiv (1, 2) + \lambda(-1, 2)$ y $s \equiv y - 2 = -2(x + 1)$. Estudia su posición relativa y calcula sus puntos de corte si los hubiera.
7. Calcula la distancia del punto $(1, 3)$ a la recta $(x, y) = (2, 2) + \lambda(1, -1)$ e interpreta el resultado
8. Consideremos el triángulo ABC rectángulo en B e isósceles. Si $A = (2, 1)$ y $B = (1, 4)$, calcula:
 - a. El vértice C (hay dos soluciones posibles).
 - b. Los otros dos ángulos del triángulo.
 - c. El área y el perímetro del triángulo.
9. Tres puntos de un triángulo son $A = (1, 1)$, $B = (3, 3)$ y $C = (5, 2)$. Calcula sus lados y ángulos.
10. Calcula la circunferencia que pasa por los puntos $A = (4, 5)$, $B = (-3, 4)$ y $C = (6, 1)$.
11. Calcula la ecuación de una elipse horizontal con centro en $(-1, 3)$ y radios 2 y 4. Calcula sus focos y dibujarla. ¿Cómo cambiaría la respuesta si la elipse fuera vertical?
12. Dibuja la hipérbola $4x^2 - 8y^2 = 2$ y sus asíntotas. Calcula sus focos y excentricidad.
13. Identifica las figuras y dibújalas
 - a. $4x^2 + 3y^2 - 8x = 0$
 - b. $\frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 2$
 - c. $x^2 + 2x + 1 - 3y = 0$
 - d. $4x^2 - 8x + 4y^2 - 16y + 4 = 0$
14. Una parábola vertical tiene el vértice en $(1, 2)$ y las ramas hacia arriba. Si sabemos que pasa por el punto $(0, 5)$ calcula su ecuación y su foco.

RESUMEN

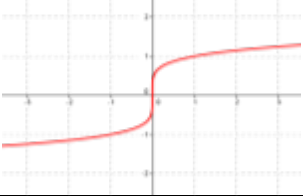
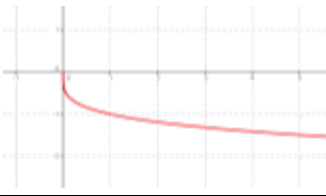
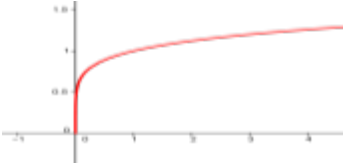
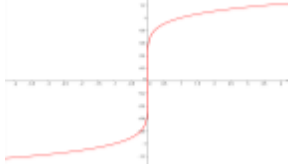
		Ejemplos
Vector	Par $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ que representa un desplazamiento.	$P=(1,1), Q=(2,-1), \overrightarrow{PQ}=(1,-2)$
Producto escalar	Número que se calcula multiplicando las componentes de dos vectores: $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$	$(1,2) \cdot (1,-3) = 1 \cdot 1 + 2(-3) = -5$
Módulo de un vector	Longitud del desplazamiento que representa el vector: $ \vec{v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$	$\ (1,3)\ = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$
Ángulo entre vectores	$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\ \vec{v}\ \cdot \ \vec{w}\ }$	$\cos \alpha = \frac{(1,2) \cdot (1,-3)}{\ (1,2)\ \cdot \ (1,-3)\ } = \frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}$
Recta	Son los puntos que se pueden alcanzar sumándole a un punto un vector. Puede estar en forma vectorial, paramétrica, continua, punto - pendiente, implícita o explícita.	$(x,y) = (1,1) + \lambda(2,-3);$ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3}$ $x+2y=4; y = -\frac{x}{2} + 2$
Distancia de un punto a una recta	$d(P,r) = \left \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right $	$r: 3x + 4y = 7; P(1,2);$ $d(P,r) = \left \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 7}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right = \frac{5}{5} = 1$
Lugar geométrico	Puntos del plano que verifican una ecuación	$x + y = 3, x^3 - 3y^2 = 1$
Circunferencia	Lugar geométrico de los puntos que equidistan de un centro. Su ecuación es $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$	Circunferencia de radio 4 y centro $(0,2): x^2 + (y-2)^2 = 16$
Elipse	Lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante. Su ecuación canónica es $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x+1)^2}{4} + y^2 = 1$
Hipérbola	Lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante. Su ecuación es $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ Si $a = b$ se llama hipérbola equilátera . En ese caso su ecuación es $y = \frac{k}{x}$	$\frac{x^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ $xy = 10$
Parábola	Lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado foco y una recta llamada directriz. Su ecuación es $y - y_0 = \alpha(x - x_0)^2$	$y = x^2 + 1$ (vertical) $x - 2 = (y-1)^2$ (horizontal)

CAPÍTULO 6: FUNCIONES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

TIPOS DE FUNCIONES. GRÁFICAS

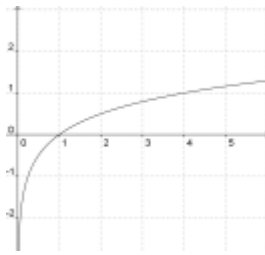
- Realiza una tabla de valores y representa la función identidad.
- Calcula las imágenes de los números $-3; -\frac{1}{2}; 0; 1; \sqrt{2}; \frac{3}{2}; 10$ por la función $f(x) = -x^2 + 2x - 3$
- Copia en tu cuaderno las siguientes gráficas de funciones e indica si el índice es par o impar en las representaciones de las siguientes funciones raíz:

FUNCIÓN	ÍNDICE		FUNCIÓN	ÍNDICE	
	Par	Impar		Par	Impar
					
					

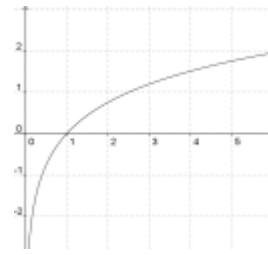
- Realiza en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se duplica cada hora.
- Vuelve a repetir otra vez el ejercicio anterior suponiendo que el número de bacterias queda dividido por 2 cada hora.
- En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = f(x) = x^2$. (función potencial) y $f(x) = 2^x$. (función exponencial), con valores de "x" entre 0 y 5. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.
- Utilizando la calculadora, haz en tu cuaderno una tabla de valores y representa las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$.
- Una persona ha ingresado una cantidad de 5 000 euros a interés del 2 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1.02.
 - Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años.
 - Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.
 - Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.
- Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por $1/3$ cada hora. Si la cantidad a las 9 de la mañana es de 10 millones de bacterias:
 - Haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 3 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás").
 - Representa gráficamente estos datos.
- Representa en tu cuaderno, mediante tablas de valores, las gráficas de las siguientes funciones:
 - $f(x) = \log_3 x$
 - $f(x) = \log_{1/3} x$
 - $f(x) = \log_{1.5} x$
 Comprueba que en todos los casos pasan por los puntos $(1, 0)$, $(a, 1)$ y $(1/a, -1)$, donde a es la base.

11. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, sabiendo que son funciones logarítmicas:

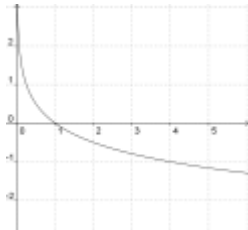
a)



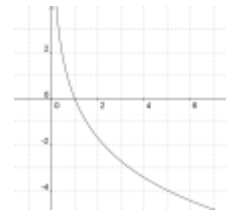
b)



c)



d)



12. Representa gráficamente la función valor absoluto.

13. Representa las siguientes funciones a trozos. Se indican los puntos que tienes que calcular.

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -4 \\ -x + 2 & \text{si } -4 \leq x < 0 \\ 5 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Puntos: $-6; -4; -\frac{1}{2}; -0'2; 0; 1; \frac{3}{2}; 4$

$$b) \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -3 \\ x & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ \sqrt{x} & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Puntos: $-5; -3; -\frac{1}{2}; -0'2; 0; 2; \frac{9}{4}; 4$

14. Los datos de la tabla indican en la primera fila, los precios, en euros, por saco de naranjas, en la segunda fila, las cantidades demandadas de naranjas por semanas, y en la tercera fila, las cantidades ofrecidas:

Precio por saco (euros)	8	6	4	2
Cantidad demandada (miles de sacos por semana)	50	100	200	400
Cantidad ofrecida (miles de sacos por semana)	300	250	200	100

a) Dibuja una gráfica con los datos de esta tabla, representando en el eje vertical los precios, y en el eje horizontal las cantidades demandadas y ofrecidas. Une con un trazo continuo ambas curvas.

15. Los datos de la tabla indican en la primera fila, los precios, en euros, del alquiler de un piso de 70 m², en la segunda fila, la cantidad de personas que desean alquilar un piso, y en la tercera fila, los pisos vacíos en una determinada ciudad:

Precio de un piso (euros)	1500	1000	500
Cantidad demandada (personas que desean alquilar)	10	100	500
Cantidad ofrecida (pisos libres)	600	200	50

a) Dibuja una gráfica de las curvas de oferta y demanda.

b) Determina de forma aproximada el punto de equilibrio

2. OPERACIONES CON FUNCIONES

16. Realiza las operaciones indicadas con las siguientes funciones:

$$p(x) = -5x + 3 ; q(x) = 2x^2 - x + 7 ; r(x) = -x^3 + 6 ; s(x) = 3x^2 - x$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} ; g(x) = \frac{-3}{x} ; h(x) = \frac{x+1}{x^2} ; j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} ; l(x) = 2^{\frac{1}{x}} ; m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x ; n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) ; b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) ; c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) ; d(x) = \log(x^3-1)$$

a) $(p+q)(x)$	b) $(q+r)(x)$
c) $(q+r+s)(x)$	d) $(s-q)(x)$
e) $(q-r)(x)$	f) $(r-p)(x)$
g) $(f+p)(x)$	h) $(j-f)(x)$
i) $(g+k)(x)$	j) $(m-a)(x)$
k) $(b+d)(x)$	l) $(r+m)(x)$
m) $(p \cdot q)(x)$	n) $(q \cdot r)(x)$
o) $(q \cdot r : s)(x)$	p) $(p : q)(x)$
q) $(f \cdot p)(x)$	r) $(j \cdot f)(x)$
s) $(g : k)(x)$	t) $(a \cdot b)(x)$
u) $(p \circ q)(x)$	v) $(a \circ b)(x)$
w) $(r \circ s)(x)$	x) $(f \circ p)(x)$
y) $(j \circ f)(x)$	z) $(g \circ k)(x)$

17. Calcula en tu cuaderno las inversas que existan de las funciones del ejercicio anterior:

$$p(x) = -5x + 3 ; q(x) = 2x^2 - x + 7 ; r(x) = -x^3 + 6 ; s(x) = 3x^2 - x$$

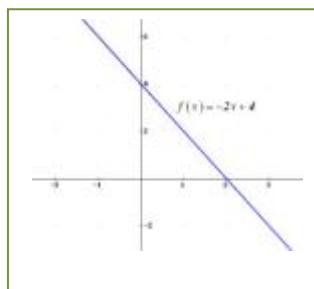
$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} ; g(x) = \frac{-3}{x} ; h(x) = \frac{x+1}{x^2} ; j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} ; l(x) = 2^{\frac{1}{x}} ; m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x ; n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) ; b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) ; c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) ; d(x) = \log(x^3-1)$$

FUNCIÓN	INVERSA	FUNCIÓN	INVERSA
a) $p(x)$		b) $q(x)$	
c) $r(x)$		d) $s(x)$	
e) $f(x)$		f) $g(x)$	
g) $h(x)$		h) $j(x)$	
i) $k(x)$		j) $l(x)$	
k) $m(x)$		l) $n(x)$	
m) $a(x)$		n) $b(x)$	
o) $c(x)$		p) $d(x)$	

18. Calcula la función inversa de:



19. Realiza el proceso anterior para la función arco tangente: $y = \arctg x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg}(y)$, $y \in [-\pi/2, \pi/2]$

3. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

20. Calcula en tu cuaderno el dominio de las siguientes funciones:

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a) $f(x) = \frac{5x^2 + 1}{x^2 - 3}$		b) $j(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$	
c) $g(x) = \sqrt{\frac{3x+2}{x-3}}$		d) $k(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4}$	
e) $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$		f) $l(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$	
g) $i(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$		h) $m(x) = 3\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$	

21. Calcula en tu cuaderno el dominio de cada una de las siguientes funciones:

$$p(x) = -5x + 3 ; q(x) = \sqrt{2x^2 - x + 7} ; r(x) = \sqrt[4]{-x^3 - 1} ; s(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x}$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} ; g(x) = \frac{-3}{x} ; h(x) = \frac{x+1}{x^2+1} ; j(x) = \frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} ; l(x) = 2^{\frac{1}{x}} ; m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} ; n(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$a(x) = L(x+2) ; b(x) = \log\left(\frac{x^2}{4}\right) ; c(x) = L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) ; d(x) = \log(x^3-5)$$

FUNCIÓN	DOMINIO	FUNCIÓN	DOMINIO
a) $p(x)$		b) $q(x)$	
c) $r(x)$		d) $s(x)$	
e) $f(x)$		f) $g(x)$	
g) $h(x)$		h) $j(x)$	
i) $k(x)$		j) $l(x)$	
k) $m(x)$		l) $n(x)$	
m) $a(x)$		n) $b(x)$	
o) $c(x)$		p) $d(x)$	

22. Calcula en tu cuaderno los puntos de corte con los ejes de las funciones siguientes:

$$p(x) = -5x + 3 ; q(x) = \sqrt{2x^2 - x + 7} ; r(x) = \sqrt[4]{-x^3 - 1} ; s(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x} ; f(x) = \frac{2x-4}{x+3}$$

$$g(x) = \frac{-3}{x} ; h(x) = \frac{x+1}{x^2+1} ; j(x) = \frac{-x^2+2x}{x^2-4} ; k(x) = e^{x-4} ; l(x) = 2^{\frac{1}{x}} ; m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$$

$$n(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}} ; a(x) = L(x+2) ; b(x) = \log\left(\frac{x^2}{4}\right) ; c(x) = L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) ; d(x) = \log(x^3-5)$$

FUNCIÓN	PUNTOS CORTE EJES		FUNCIÓN	PUNTOS CORTE EJES	
	Ordenadas	Abcisas		Ordenadas	Abcisas
a) $p(x)$			b) $q(x)$		
c) $r(x)$			d) $s(x)$		
e) $f(x)$			f) $g(x)$		
g) $h(x)$			h) $j(x)$		
i) $k(x)$			j) $l(x)$		
k) $m(x)$			l) $n(x)$		
m) $a(x)$			n) $b(x)$		
o) $c(x)$			p) $d(x)$		

23. Estudia las simetrías y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

$$f(x) = 2^{x-24} \cdot 4^{3x+1} \cdot 8^{-x-1} - 1$$

$$h(x) = x^3 + 4x$$

$$k(x) = e^{-2x} - 22$$

$$g(x) = -7x^4 - x^2 + 1$$

$$j(x) = \sqrt{15x-3}\sqrt{-x-9}$$

$$l(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

24. Calcula en tu cuaderno el signo de las siguientes funciones:

$$p(x) = -5x + 3 ; q(x) = \sqrt{2x^2 - x + 7} ; r(x) = \sqrt[4]{-x^3 - 1} ; s(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x}$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} ; g(x) = \frac{-3}{x} ; h(x) = \frac{x+1}{x^2+1} ; j(x) = \frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} ; l(x) = 2^{\frac{1}{x}} ; m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} ; n(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

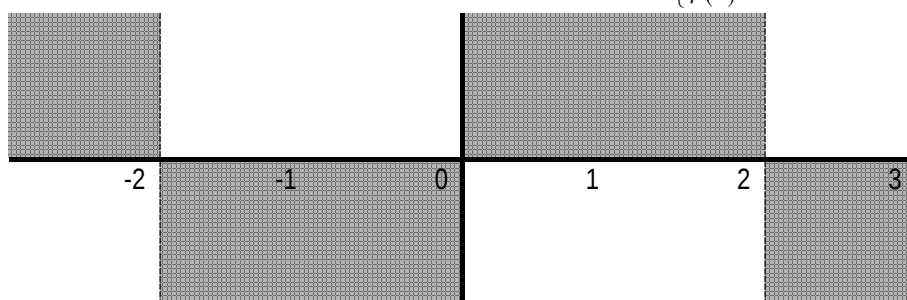
$$a(x) = L(x+2) ; b(x) = \log\left(\frac{x^2}{4}\right) ; c(x) = L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) ; d(x) = \log(x^3-5)$$

FUNCIÓN	SIGNO		FUNCIÓN	SIGNO	
	POSITIVO	NEGATIVO		POSITIVO	NEGATIVO
a) $p(x)$			b) $q(x)$		
c) $r(x)$			d) $s(x)$		
e) $f(x)$			f) $g(x)$		
g) $h(x)$			h) $j(x)$		
i) $k(x)$			j) $l(x)$		
k) $m(x)$			l) $n(x)$		
m) $a(x)$			n) $b(x)$		
o) $c(x)$			p) $d(x)$		

25. Interpreta gráficamente los intervalos de signo del ejercicio anterior, siguiendo el ejemplo:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-4} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ceros: } 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ \text{Polos: } x^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-3) - \\ f(-1) + \\ f(1) - \\ f(3) + \end{cases}$$

la gráfica de la función debe ir por la zona no sombreada:



EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. Esboza la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x \leq -1, \\ x^3-x & \text{si } x > -1. \end{cases}$

2. Realiza las operaciones indicadas con las siguientes funciones:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^3-1)$$

a) $(s+q)(x)$	b) $(r+p)(x)$
c) $(p-q)(x)$	d) $(p+q+r+s)(x)$
e) $(q-r-s)(x)$	f) $(p-q+r-s)(x)$
g) $(g+h)(x)$	h) $(s-g)(x)$
i) $(n-k)(x)$	j) $(g+d)(x)$
k) $(b-d)(x)$	l) $(c+s)(x)$
m) $(s \cdot q \cdot r)(x)$	n) $(r \cdot p)(x)$
o) $(q : p)(x)$	p) $(s : q)(x)$
q) $(g \cdot h)(x)$	r) $(s : g)(x)$
s) $(n \cdot k)(x)$	t) $(g : d)(x)$
u) $(s \circ q)(x)$	v) $(r \circ p)(x)$
w) $(q \circ p)(x)$	x) $(g \circ h)(x)$
y) $(s \circ g)(x)$	z) $(n \circ k)(x)$

3. Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Determina los siguientes elementos: su dominio, puntos de corte con los ejes, signo y simetrías.

4. Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas $y = x^2 + 1$, $y = \frac{2}{x}$ e $y = x - 1$.

5. Consideremos las siguientes funciones:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$h(x) = 2^{-x+1}$$

$$k(x) = 2^x \cdot 30^{x-1} \cdot 12^{-x+1}$$

$$m(x) = \sqrt[4]{-5+2x}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+7}}$$

$$j(x) = L(x^5 - 1)$$

$$l(x) = \frac{x^2-9}{x^3+7x^2+15x+9}$$

$$n(x) = (4x^2 - 4x + 1)^{\frac{-1}{3}}$$

a) Calcula las siguientes composiciones:

$$f \circ h \quad ; \quad g \circ h \quad ; \quad g \circ j \quad ; \quad k \circ h \quad ; \quad g \circ h \circ j \quad ; \quad m \circ j \quad ; \quad l \circ h \quad ; \quad m \circ h \quad ; \quad j \circ h \quad ; \quad l \circ m$$

b) Calcula $f^{-1}(x)$, $h^{-1}(x)$, $k^{-1}(x)$, $j^{-1}(x)$, $n^{-1}(x)$ y verificar que son las inversas de $f(x)$, $h(x)$, $k(x)$, $j(x)$ y $n(x)$. ¿Por qué $g^{-1}(x)$ y $m^{-1}(x)$ no son inversas?

c) Calcula todos los dominios.

d) Calcula los puntos de corte con los ejes de todas las funciones.

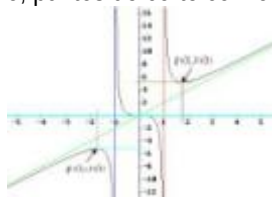
6. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde un determinado punto. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos, viene dada por $h(t) = 5 + 4t - t^2$. Calcula la altura desde la que se lanza el objeto y a la que se encuentra después de 1 segundo. Determina en qué instante alcanzará la altura máxima y cuál es. Por último, calcula el instante en que caerá al suelo y representa gráficamente la situación con los datos obtenidos anteriormente.

7. Considera las funciones $f, g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \cdot \text{sen}(x)$ y $g(x) = \text{sen}(2x)$. Dibuja la región del plano limitada por las gráficas de f y de g .

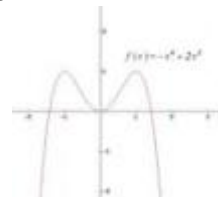
8. Sea la función dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a , b y c sabiendo que es impar y que pasa por el punto $(1, -2)$.

9. Sean las funciones definidas mediante $f(x) = |x(x-2)|$ y $g(x) = x+4$. Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas.
10. El gasto por el consumo de luz (en céntimos de euro) de una vivienda, en función del tiempo transcurrido (en horas), nos viene dado por la expresión $f(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 2t + 10$ $0 \leq t \leq 12$. a) Representa gráficamente la función. b) ¿Cuál es el consumo a las 6 horas? ¿Y después de 12 horas?
11. Considera la función definida por $f(x) = \frac{2 \log x}{x^2}$. Calcula su dominio.
12. Dibuja el recinto limitado por las curvas $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y $x = 0$.
13. Las ganancias de una empresa, en millones de pesetas, se ajustan a la función $f(x) = \frac{50x-100}{2x+5}$, donde x representa los años de vida de la empresa, cuando $x \geq 0$. Calcula el dominio, corte con los ejes, signo y simetrías de dicha función.
14. Considera la función definida por $g(x) = |\ln(x)|$ (donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano). Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte entre ellas.
15. Calcula el dominio de las siguientes funciones: $f(x) = \frac{Lx}{x^2}$ (Lx indica logaritmo neperiano de x);
 $g(x) = (1-x^3) \cos x$ y $h(x) = 4x^3 - 5x + \frac{1}{e^x}$.
16. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^2-12x+9 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -2x^2+16x-30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$. Dibuja su gráfica y, a la vista de ella, indica su dominio, sus puntos de corte con los ejes y su signo.
17. Estudia el dominio, puntos de corte con los ejes y signo de las siguientes funciones:

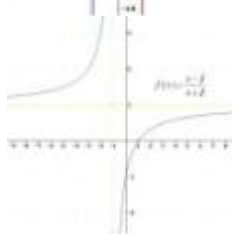
a)



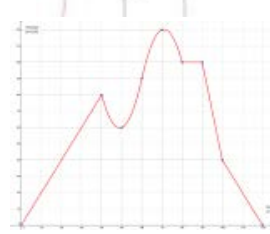
b)



c)



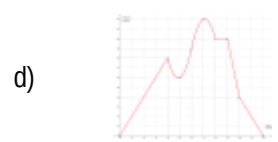
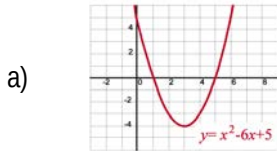
d)



18. El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de euros produce una ganancia de $f(x)$ millones de €, siendo: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{50} + \frac{8x}{25} - \frac{8}{5} & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{5}{2x} & \text{si } x > 5 \end{cases}$. Razona cuál es el rango de valores de la variable, los puntos problemáticos de cada una de las fórmulas y, finalmente, el dominio de la función.
19. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba de modo que la altura " h " (en metros) a la que se encuentra en cada instante " t " (en segundos) viene dada por la expresión $h(t) = -5t^2 + 40t$.
- ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?
 - Represente gráficamente la función $h(t)$.
 - ¿En qué momento de su caída se encuentra el objeto a 60 metros de altura?
 - ¿En qué instante llega al suelo?

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala cuál de las siguientes gráficas no corresponde a una función:



2. La fórmula de la composición $f \circ g$ de las funciones $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = -x^2 + 2$ es:

a) $-2x^2 + 3$

b) $2x^2 - 3$

c) $-4x^2 + 4x + 1$

d) $4x^2 - 4x - 1$

3. La fórmula de la función inversa o recíproca de $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ es:

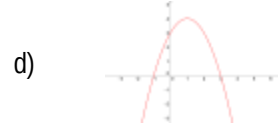
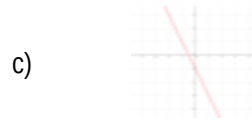
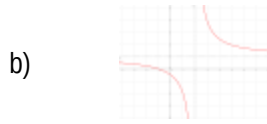
a) $\frac{x+2}{x-1}$

b) $\frac{-x+1}{x+2}$

c) $\frac{2x+1}{x-1}$

d) $\frac{-2x-1}{x-1}$

4. La gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ es:



5. El dominio de la función $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$ es:

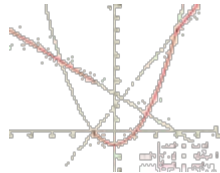
a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R} - \{1\}$

c) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

d) $\mathbb{R} - \{0\}$

6. El recorrido de la función



es:

a) $[-1, \infty[$

b) $] -1, \infty[$

c) $] -\infty, -1]$

d) $\mathbb{R} - \{4\}$

7. Los puntos de corte con el eje de abscisas de la función $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 3)$ son:

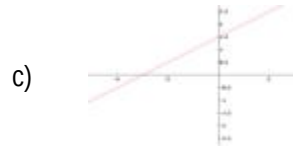
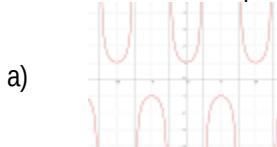
a) No tiene

b) $(1, 0); (2, 0)$

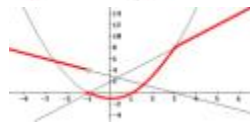
c) $(-1, 0); (2, 0)$

d) $(0, \ln 3)$

8. La única función impar entre las siguientes es:



9. El intervalo donde la función



es negativa es:

a) $]-1, 1[$

b) $] -\infty, -1[$

c) $] -\infty, 1]$

d) $] -\infty, 0[$

10. La única función NO periódica de las siguientes es:

a) $f(x) = \sin(x)$

b) $g(x) = \tan(x)$

c) $h(x) = e^x$

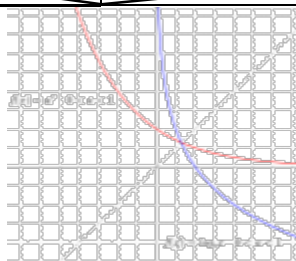
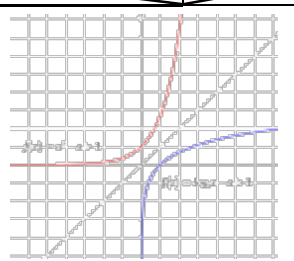
d) $j(x) = \operatorname{cosec}(x)$

RESUMEN

TIPOS DE FUNCIONES		FÓRMULA	
ALGEBRAICAS	Polinómicas	Polinomio	
	Racionales	Cociente de polinomios	
	Irracionales	Raíz de una racional	
TRASCENDENTES	Exponenciales	Exponencial (variable en el exponente)	
	Logarítmicas	Logaritmo (variable como argumento de un logaritmo)	
	Trigonométricas	Trigonometría (variable como argumento de una razón trigonométrica)	
DEFINIDAS A TROZOS		Varias fórmulas dependiendo de los valores de la variable	
OPERACIÓN		EJEMPLO: $f(x) = \frac{2}{x}$; $g(x) = \frac{-3x}{x+1}$	
Función suma $f + g$ $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ $(f + g)(x) = \frac{-3x^2 + 2x + 2}{x \cdot (x + 1)}$	Función resta $f - g$ $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ $(f - g)(x) = \frac{3x^2 + 2x + 2}{x \cdot (x + 1)}$	Función producto $f \cdot g$: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $(f \cdot g)(x) = \frac{-6}{x + 1}$	Función cociente f/g: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x + 2}{-3x^2}$
Función compuesta	$\underbrace{f \circ g}_{\substack{g \text{ compuesto con } f \\ \text{(se lee primero la función que actúa antes, NO de izquierda a derecha)}}} \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{-3x}{x+1}\right)$ donde ponga x en f, ponemos $g(x) = \frac{-3x}{x+1}$ $= \frac{2}{\frac{-3x}{x+1}} = \frac{2x+2}{-3x}$ $\underbrace{g \circ f}_{\substack{f \text{ compuesto con } g \\ \text{(se lee primero la función que actúa antes, NO de izquierda a derecha)}}} \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2}{x}\right)$ donde ponga x en g, ponemos $f(x) = \frac{2}{x}$ $= \frac{-3 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)}{\left(\frac{2}{x}\right) + 1} = \frac{\frac{-6}{x}}{\frac{2+x}{x}} = \frac{-6}{2+x}$		
Función inversa f^{-1}: $\begin{cases} f \circ f^{-1} = I \\ f^{-1} \circ f = I \end{cases}$ Si existe, la inversa es única y su gráfica y la de la función son simétricas respecto a la de la función identidad.	1º Llamamos y a $f(x)$ 2º Despejamos x en función de y 3º Cambiamos los papeles de x e y $g(x) = y = \frac{-3x}{x+1} \Rightarrow y \cdot (x+1) = -3x \Rightarrow yx + y = -3x \Rightarrow yx + 3x = -y \Rightarrow x(y+3) = -y \Rightarrow x = \frac{-y}{y+3}$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x}{x+3}$		

CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES			
1) Dominio	Conjunto de valores que <u>tienen</u> imagen.		
2) Puntos de corte con los ejes	Ordenadas (OY)	$\exists f(0) \Rightarrow (0, f(0))$	Operación numérica
		$\nexists f(0) \Rightarrow$ No hay	Nada
	Abscisas (OX) -CEROS-	$f(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2, \dots \Rightarrow (x_1, 0); (x_2, 0); \dots$	Ecuación
3) Simetría	Par	$f(-x) = f(x)$	Operación algebraica
	Impar	$f(-x) = -f(x)$	

FAMILIAS DE FUNCIONES		Racional	Irracional		Exponencial	Logarítmic a	Definida a trozos
Dominio (D)		$\Re - \{\text{polos}\}$	Índice par	Índice impar	$\Re - \{\text{puntos problemáticos exponente}\}$	$\{x \in \Re; \text{argumento} > 0\}$	-Valores de la variable -Puntos problemáticos de cada fórmula $\Re - \{\text{valores que no toma la variable y puntos problemáticos incluidos en el rango}\}$
			$\{x \in \Re; \text{radicando} \geq 0\}$	$\Re - \{\text{puntos problemáticos radicando}\}$			
Puntos de corte con los ejes	OY	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$ sustituyendo en la fórmula cuyo rango contiene al 0
	OX	Numerador = 0	Radicando = 0	Radicando = 0	No hay	Argumento = 1	-Cada fórmula = 0 -Soluciones que pertenecen a su rango
Signo		-Ceros y polos -Estudio del signo en la recta real	Positivo siempre salvo en los ceros	Signo del radicando	Positivo en todo su dominio	$0 < a < 1$: argumento<1: argumento>1: $a > 1$: argumento<1: argumento>1: +	-Ceros, polos y puntos donde cambia la definición -Estudio del signo en la recta real
Simetría	PAR	Todos los grados pares o impares	Nunca	Simetría del radicando	Argumento par	Argumento par	Es tan infrecuente la simetría en este tipo de funciones que no merece la pena estudiarla
	IMPAR	Todos los grados del ndor pares y del d ^{dor} impares o viceversa			Nunca	Nunca	

CARACTERÍSTICAS		$0 < a < 1$		$a > 1$	
		a^x	$\log_a x$	a^x	$\log_a x$
Dominio		$\Re = (-\infty, \infty)$	$\Re^+ = (0, \infty)$	$\Re = (-\infty, \infty)$	$\Re^+ = (0, \infty)$
Recorrido		$\Re^+ = (0, \infty)$	$\Re = (-\infty, \infty)$	$\Re^+ = (0, \infty)$	$\Re = (-\infty, \infty)$
Puntos de corte con los ejes	Ordenadas	(0, 1)		(0, 1)	
	Abscisas		(1, 0)		(1, 0)
Signo	Positivo	$\Re = (-\infty, \infty)$	(0, 1)	$\Re = (-\infty, \infty)$	(1, ∞)
	Negativo		(1, ∞)		(0, 1)
Simetría					
DIBUJO					

CARACTERÍSTICAS		sen x	cosec x = 1 / sen x
Dominio		$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	$\mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{R}\}$
Periodo fundamental		$[0, 2\pi]$	$[0, 2\pi]$
Recorrido		$[-1, 1]$	$\mathbb{R} - [-1, 1] = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Puntos de corte con los ejes	Ordenadas	(0, 0)	
	Abcisas	$(k\pi, 0), k \in \mathbb{R}; \dots, (-2\pi, 0), (-\pi, 0), (0, 0), (\pi, 0), (2\pi, 0), \dots$	
Signo	Positivo	$(2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{R}; \dots \cup]-2\pi, -\pi[\cup]0, \pi[\cup \dots$	$(2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{R}; \dots \cup]-2\pi, -\pi[\cup]0, \pi[\cup \dots$
	Negativo	$((2k+1)\pi, (2k+2)\pi), k \in \mathbb{R}; \dots \cup]-2\pi, -\pi[\cup]0, \pi[\cup \dots$	$((2k+1)\pi, (2k+2)\pi), k \in \mathbb{R}; \dots \cup]-\pi, 0[\cup]\pi, 2\pi[\cup \dots$
Simetría		Impar	Impar
DIBUJO			

CARACTERÍSTICAS		cos x	sec x = 1 / cos x
Dominio		$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	$\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi; k \in \mathbb{R}\}$
Periodo fundamental		$[-\pi, \pi]$	$[-\pi, \pi]$
Recorrido		$[-1, 1]$	$\mathbb{R} - [-1, 1] = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Puntos de corte con los ejes	Ordenadas	(0, 1)	(0, 1)
	Abcisas	$\dots, (-\frac{3\pi}{2}, 0), (-\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{3\pi}{2}, 0), \dots$	
Signo	Positivo	$\dots \cup]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[\cup \dots$	$\dots \cup]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[\cup \dots$
	Negativo	$\dots \cup]\frac{-3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\cup \dots$	$\dots \cup]\frac{-3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\cup \dots$
Simetría		Par	Par
DIBUJO			

CARACTERÍSTICAS		$\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x / \cos x$	$\operatorname{cotg} x = 1 / \operatorname{tg} x = \cos x / \operatorname{sen} x$
Dominio		$\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi; k \in \mathbb{R}\}$	$\mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{R}\}$
Periodo fundamental		$]-\pi/2, \pi/2[$	$]-\pi/2, \pi/2[$
Recorrido		$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
Puntos de corte con los ejes	Ordenadas	(0, 0)	
	Abcisas	$(k\pi, 0); k \in \mathbb{R}; \dots, (-\pi, 0), (0, 0), (\pi, 0), \dots$	
Signo	Positivo	$\dots \cup]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\pi, \frac{3\pi}{2}[\cup \dots$	$\dots \cup]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\pi, \frac{3\pi}{2}[\cup \dots$
	Negativo	$\dots \cup]\frac{3\pi}{2}, -\pi[\cup]\frac{\pi}{2}, 0[\cup]\pi, 2\pi[\cup \dots$	$\dots \cup]\frac{3\pi}{2}, -\pi[\cup]\frac{\pi}{2}, 0[\cup]\pi, 2\pi[\cup \dots$
Simetría		Impar	Impar
DIBUJO			

CAPÍTULO 7: LÍMITES Y CONTINUIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE LÍMITE

- Utiliza la definición de límite para probar que $\lim_{x \rightarrow +1} x = 1$.
- Calcula los límites laterales y determina si existe el límite en las funciones siguientes definidas a trozos, en los puntos en los que se unen dos ramas:
 - $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < 1 \\ 3x-2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
 - $f(x) = \begin{cases} \frac{-2x+3}{x+5} & \text{si } x < 1 \\ \frac{5x^2}{x+3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
 - $f(x) = \begin{cases} \frac{7}{x^2+4} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
- Escribe la definición de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
- Utiliza la definición de límite infinito para probar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.
- Utiliza la definición de límite infinito para probar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
- Clasifica los siguientes límites en finitos o infinitos, y calcúlalos:
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} -x^2$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2$
 - $\lim_{x \rightarrow 3} x^2$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$
- Calcula los siguientes límites, indicando el signo:
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$
- Calcula los siguientes límites, indicando el signo:
 - $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5}{x-1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5}{x-1}$
 - $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-5}{x-3}$
 - $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-5}{x-3}$
- Determina las asíntotas verticales de las funciones siguientes:
 - $f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-2)}$
 - $f(x) = \frac{x \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)}$
 - $f(x) = \frac{(x+4)^2}{(x-1) \cdot (x+4)}$
 - $f(x) = \frac{(x+4)}{(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x+1)}$
- Determina la asíntota horizontal de cada una de las funciones siguientes:
 - $f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-3)}$
 - $f(x) = \frac{3x \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)}$
 - $f(x) = \frac{(x+4)^2}{2(x-1) \cdot (x-4)}$
 - $f(x) = \frac{(x+4)}{(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x+1)}$
- Determina la asíntota oblicua, si existe, de cada una de las funciones siguientes:
 - $f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1)}$
 - $f(x) = \frac{3x^2 \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)}$
 - $f(x) = \frac{x^2+4}{2(x-1)}$
 - $f(x) = \frac{(2x^2+4)}{(x+1)}$
- Analiza el comportamiento en el infinito de cada una de las funciones siguientes:
 - $f(x) = (x+4)^2$
 - $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$
 - $f(x) = x^3 + 4$
 - $f(x) = \frac{2x^5+4}{x+1}$

2. CÁLCULO DE LÍMITES

13. Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2 - 9} - \frac{1}{x - 3} \right)$

14. Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$

15. Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right)$

16. Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x - 2}{x + 2} - \frac{x}{x^2 - 4} \right)$

17. Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} \right)$

18. Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 1} \right)$

19. Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{6 + x} - 3}{x^2 - 9} \right)$

20. Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{3 + x} - 2}{x - 1} \right)$

21. Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{3 - x} - \sqrt{3}}{x} \right)$

22. Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2 - \sqrt{2 + x}}{x - 2} \right)$

23. Escribe, sin hacer cálculos, el valor de los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3}{5x^2 + 2x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5 + 3}{5x^2 + 2x - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3}{5x^7 + 2x - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}{2x^3 + x^2 - x}$

24. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2 - 1} - \frac{x + 1}{x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 2}{x - 1} - 3x \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 3x} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 3} \right)$

25. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 4}}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin x)$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^5 - 7x}{x^5 + 100x^2} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x))$

26. Determina los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 1}{x - 2} \right)^{2x^2 - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 + x}{3x^2 - 2} \right)^{\frac{2x^2 - 1}{x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^3 + 5} \right)^{3x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x + 3}{5x + 1} \right)^{\frac{x^2 - 1}{5x}}$

27. Determina los límites siguientes (observa que *no* son tipo e):

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x + 3}{x + 1} \right)^{\frac{x^2 - 1}{5x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 1}{4x^3 + 5} \right)^{3x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 + x}{3x^2 - 2} \right)^{\frac{2x^2 - 1}{x^3}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x + 3}{5x^2 + 1} \right)^{\frac{x^2 - 1}{5x^3}}$

3. CONTINUIDAD DE FUNCIONES

28. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

b) $f(x) = \sqrt{x-5}$

c) $f(x) = \log_2(x-3)$

d) $f(x) = \begin{cases} 2+x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 1+e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

29. Determina el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ k+x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

30. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < -1 \\ 2+x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = x - \sqrt{x-2}$

c) $f(x) = |x-3| - 1$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Límites

1. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2-9}$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x-3}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+27}{x^2+3x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2+x-2}$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x-2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-4}{x-1}$

g) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3+8x-2}{x^2-2x+3}$

2. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+8}{x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+8}{-x^5-2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+8}{-x^3-2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2-4} - \frac{2}{x+2} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2-4} - \frac{x-3}{x+2} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{3x-1} - \sqrt{x^2-2x})$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2})$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}} \right)$

3. Determina las asíntotas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \frac{x^2-2|x|}{x-3}$

b) $f(x) = \frac{5}{x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

d) $f(x) = \frac{x^2-5x}{x^2-1}$

e) $f(x) = \frac{-5x}{(x-1)^2}$

f) $f(x) = \frac{-5x^2-5}{(x-1)^2}$

g) $f(x) = \ln \frac{-5x}{(x-1)^2}$

h) $f(x) = \sqrt{\frac{-5x}{(x-1)^2}}$

Continuidad

4. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = \begin{cases} 3^x & x < -2 \\ 4-x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ \log_2 x & x > 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ x^2-3x & 0 \leq x < 3 \\ \sqrt{x-3} & x \geq 3 \end{cases}$

c) $h(x) = |x^2-5x|$

5. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = |x^2-25|$

b) $g(x) = 2 - \frac{|x|}{x}$

c) $h(x) = \frac{x^2-2|x|}{x-3}$

6. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2-4x+3}$

b) $g(x) = \frac{7x+2}{x^2+x}$

c) $h(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}$

7. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} \qquad \text{b) } g(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x^2-4}} \qquad \text{c) } h(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x^2-3x}}$$

8. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

$$\text{a) } f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x-5}\right) \qquad \text{b) } g(x) = \ln(-x^2 - x + 2) \qquad \text{c) } h(x) = \ln\left(\frac{9-x^2}{(x-3)^2}\right)$$

9. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

$$\text{a) } f(x) = e^{\frac{x^2-9}{7+x}} \qquad \text{b) } g(x) = e^{\sqrt{x-5}} \qquad \text{c) } h(x) = 2^{\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}}$$

10. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & x < 0 \\ 2+e^x & x \geq 0 \end{cases}$. a) Estudia su continuidad. b) Representa su gráfica.

11. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & x < 2 \\ k+x & x \geq 2 \end{cases}$. a) Determina el valor de k para que la función sea continua en toda la recta real.
b) Representa su gráfica

12. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x-3 & \dots x < -1 \\ x^2-5 & -1 \leq x < 1 \\ \frac{2}{x} & x \geq 1 \end{cases}$. a) Estudia su continuidad. b) Representa su gráfica.

13. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & x < 2 \\ x^2-4 & x \geq 2 \end{cases}$. a) Estudia su continuidad. b) Representa su gráfica.

14. Esboza la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x^2-25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

15. Esboza la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

AUTOEVALUACIÓN

1. El límite $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$ vale:
a) ∞ b) 0 c) 1 d) $2/3$
2. El límite $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x - 2) \cdot \left(\frac{1}{x + 2} \right)$ vale:
a) ∞ b) 0 c) 1 d) -1
3. El límite $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2} \right)$ vale:
a) ∞ b) 0 c) $-2/3$ d) -1
4. El límite $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2 + x} - 1}{x + 1}$ vale:
a) $1/2$ b) 0 c) $-\infty$ d) -1
5. El límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x - 4}{x^2 + 3}$ vale:
a) ∞ b) 0 c) 5 d) 1
6. El límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x - 4}{x^3 + 3}$ vale:
a) ∞ b) 0 c) 5 d) 1
7. El límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x - 2} \right)^{2x^2 + 1}$ vale:
a) ∞ b) 0 c) 3 d) 1
8. Estudia la continuidad de $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3}{x} & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = 0$.
a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito
9. Estudia la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$.
a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito
10. Estudia la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$.
a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito

RESUMEN

Definición de límite	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow$ Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $ x - a < \delta$, se cumple $ f(x) - L < \varepsilon$.	
Límite lateral a la derecha	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ el valor de $f(x)$ cuando x tiende a a , siempre que se cumpla la condición $x > a$	La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ tiene límite lateral a la izquierda 8, y de límite lateral a la derecha también 8, pues $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^3 = 2^3 = 8$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} 3x + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$
Límite lateral a la izquierda	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ el valor de $f(x)$ cuando x tiende a a , siempre que se cumpla la condición $x < a$	
Existencia de límite	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$	La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ tiene límite en $x = 2$
Asíntotas	Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = K$ hay una asíntota horizontal $y = K$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ hay una asíntota vertical $x = a$.	$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow$ asíntota horizontal, $y = 0$ y asíntota vertical $x = 0$
Propiedades de los límites	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} (K \cdot f(x)) = K \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ si $g(a) \neq 0$.	
Continuidad de una función en un punto	Una función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$, si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que siempre que $ x - a < \delta$, se cumple que $ f(x) - f(a) < \varepsilon$.	La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ es continua en $x = 2$
Propiedades de las funciones continuas	La suma y el producto de funciones continuas es una función continua. El cociente de funciones continuas es una función continua si no se anula el denominador.	Los polinomios son funciones continuas en $\mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$
Tipos de discontinuidad	Evitable. De primera especie de salto finito. De primera especie de salto infinito. De segunda especie	$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ evitable en $x = 2$ $f(x) = \frac{1}{x}$ de primera especie con salto infinito en $x = 0$

CAPÍTULO 7: DERIVADAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE DERIVADA

1. Halla la tasa de variación media en los intervalos $[-3, 2]$, $[1, 5]$ y $[0, 3]$ de las funciones siguientes:

a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 0.5x + 2$ d) $y = x - 1$

A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la tasa de variación media de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa?

2. Halla la tasa de variación media de la función $y = x^2 - 1$ en los intervalos $[-3, 2]$, $[1, 5]$ y $[0, 3]$. ¿Es ahora constante?

3. Halla la tasa de variación media de la función $y = x^3 + 1$ en los intervalos $[-3, 2]$, $[1, 5]$ y $[0, 3]$.

Habrás comprobado que en los dos últimos ejercicios la tasa de variación media no es constante.

4. Al hacer un estudio sobre el aterrizaje de aviones se graba una película desde el momento en que el avión toca tierra hasta que se para, y se miden los tiempos y las distancias recorridas:

Tiempo (t) en segundos	0	2	4	6	8	10	12	14
Distancia (d) en metros	0	100	175	230	270	300	325	340

a) Calcula la velocidad media del avión.

b) Calcula la velocidad media en los intervalos: $[0, 6]$, $[2, 10]$ y $[6, 14]$.

c) ¿Es constante?

5. Se estudia la posición de un coche respecto de la salida de un túnel y se obtienen los datos siguientes:

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocidad media del coche en el intervalo $[0, 40]$.

b) Calcula la velocidad media en los intervalos $[15, 25]$ y $[20, 30]$. ¿Es constante?

c) Si la velocidad máxima permitida es de 120 km/h, ¿consideras que ha podido sobrepasarla en algún momento? ¿Y si la velocidad máxima fuese de 80 km/h?

6. El tren AVE sale de la estación y aumenta su velocidad hasta llegar a 250 km/h en 10 minutos, mantiene entonces esa velocidad constante durante hora y media, y comienza a disminuirla hasta pararse en otros 10 minutos.

a) Representa en una gráfica la función tiempo - velocidad.

b) Ya sabes que la aceleración nos indica la variación de velocidad. Indica la aceleración media en los primeros 10 minutos.

c) Indica la aceleración media entre el minuto 10 y el minuto 90.

d) Determina la aceleración en los últimos 10 minutos.

7. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba la altura (en metros) y , que alcanza a los x segundos viene dada por la función: $y = 40x - 5x^2$.

a) Escribe una tabla de valores y dibuja la gráfica de la función. ¿Tiene sentido para valores de x menores que 0? ¿Y mayores a 8?

b) Calcula la velocidad media del objeto en los intervalos siguiente: $[0, 2]$, $[0, 8]$, $[1, 4]$, $[4, 8]$ y $[1, 8]$.

c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

8. Halla la derivada de las funciones siguientes en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$:

a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 0.5x + 2$ d) $y = x - 1$

A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la derivada de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa?

9. Halla la derivada de la función $y = x^2 - 1$ en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$. ¿Es ahora constante?

10. Halla la derivada de la función $y = x^3 + 1$ en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$.

Habrás comprobado que en los dos últimos ejercicios la derivada no es constante.

11. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba la altura (en metros) y , que alcanza a los x segundos es: $y = 40x - 5x^2$. Calcula la velocidad a los $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ y $x = 6$ segundos. Determina también la altura de la piedra a esos segundos. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

12. En el viaje de la actividad de introducción el coche recorría entre la primera hora y la segunda una distancia y dada por la ecuación: $y = 0.2x^2 + 110x - 67.2$. Determina la velocidad que llevaba el coche para $x = 1.5$.

13. En dicho viaje la distancia recorrida para $2.5 \leq x \leq 3$ viene dada por la ecuación $y = 110x - 121.4$. Y para $3 \leq x \leq 5$ por $y = 0.1x^2 + 118x - 146.3$. Para $x = 3$ hay un cambio en la velocidad. Calcula la velocidad antes de $x = 3$, y la velocidad después de $x = 3$.

14. Al caer un cuerpo en el vacío la distancia d (en metros), recorrida a los t segundos viene dada aproximadamente por la expresión: $d = 5t^2$. (La expresión es $d = 1/2gt^2$, donde g es la aceleración de la gravedad terrestre, aproximadamente de 9.8):

- a) ¿A qué velocidad llegará al suelo una persona que en un incendio se lance a la lona de los bomberos y tarde 4 segundos en llegar a ella?
b) ¿A qué velocidad llegará si se lanza desde una altura de 10 metros?

15. Un vehículo espacial despegue de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 50x - 0.2x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 2 km de distancia sobre el horizonte.

16. Desde un avión nodriza se suelta un avión experimental cuyo impulsor se enciende a la máxima potencia y permanece encendido 20 segundos. La distancia que separa al avión experimental del avión nodriza viene dada por $d = 0.3t^4$. Calcula la velocidad del avión experimental a los 3, 4, 7 y 10 segundos de haber sido soltado.

17. Representa gráficamente la función $y = 2$, y determina su derivada para $x = 1, 2, 3...$ a. ¿Cuánto vale? ¿Es siempre la misma? ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier recta horizontal $y = b$?

18. Dibuja una función cualquiera y dos puntos sobre ella, $f(x)$ y $f(a)$, correspondientes a las ordenadas x , a . Interpreta geoméricamente la definición de derivada a partir del dibujo.

19. Dibuja una función cualquiera y un punto cualquiera sobre la función $f(a)$. Dibuja también un segmento sobre el eje de abscisas con origen en a y longitud h . Interpreta de nuevo la definición de derivada en un punto basándote en dicha figura.

20. Calcula la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto $x = 1$. Calcula la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto $x = a$. Calcula mediante la expresión resultante $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(12)$, $f'(5.43)$ y $f'(-7)$.

21. Caída libre de una pelota. En la figura se muestran, mediante fotografía estroboscópica¹, las posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo: para $t = 1, 2, 3, 4, 5, ...$, el espacio recorrido es proporcional a 1, 4, 9, 16, 25, ..., etc. Calcula la función de posición $y = f(t)$, y calcula la velocidad y la aceleración derivando la función de posición.

22. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con las derivadas:

Función	$f(x) = x^3$	$f(x) = 2$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x$	$f(x) = k$	$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = 2x^2 + 3x$
Derivada	$f'(x) = 3x^2$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$

23. Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

2. REGLAS DE DERIVACIÓN

24. Escribe las funciones derivadas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = x^{24}$; b) $g(x) = 6x^{10}$; c) $h(x) = 6/7x^{13}$; d) $j(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$; e) $p(x) = 5x^3 - x$

25. Calcula las derivadas de las siguientes funciones polinómicas:

a) $y = 6 + x - 5x^2$; b) $y = 6x^2 - 7x + 3x^5$; c) $y = 2/3x^7 + 8/5x^5 - 9/4x^4$; d) $y = x^8 - x$

26. Un determinado gas ocupa un volumen de 2 m³ a una presión de 5 Newtons por m². Según la ley de Boyle a cada presión ejercida sobre el gas corresponde un volumen dado por $V = 10/P$. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del volumen cuando la presión es de 10 Newtons por m²? ¿Y cuándo es de 20 Newtons por m²? ¿Es la mitad?

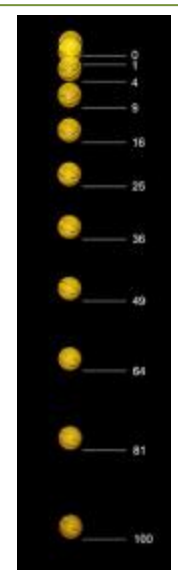
27. Ya hemos obtenido la derivada de $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Utilízala para obtener la derivada en $x = 1, 4, 5...$ ¿Puedes obtener la derivada en $x = 0$? Razona la respuesta.

28. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^2 + 3) \cdot (6x^6 - 5)$; b) $y = (7x^3 - 1) \cdot (5x^4 + 4)$; c) $y = \sqrt{x} \cdot (x^3 - 5x)$

29. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x-1}{x+3}$; b) $y = x^2 + (5/3)x^3 - 2x + 7$; c) $y = \frac{2x^3 - 5x^2}{6x^4 - 2x^3}$; d) $y = \frac{\sqrt{x^3}}{x+2}$



Posiciones de la pelota a intervalos regulares de

¹ Una lámpara estroboscópica es un instrumento que ilumina una escena durante intervalos regulares de tiempo. Si utilizamos este tipo de luz sobre un movimiento repetitivo, como la rotación de una rueda, y el intervalo coincide con un periodo completo de movimiento, el objeto parecerá estático al observador.

30. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[5]{x^7}$;

b) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}}{x^3 + 5}$;

c) $y = \frac{(x^4 - 2) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}}$;

d) $y = \frac{\sqrt[6]{x^{11}}}{x + 2}$.

31. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^5 - 7x^3)^{12}$

b) $y = (3x^3 - 5x^2)^7$

c) $y = \sqrt{(4x^5 - 8x^3)^5}$

d) $y = \sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$

32. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\frac{3x^2 - 5x}{2x^3 + 7}}(x^4 - 6x^3)^2$

b) $y = \sqrt{\frac{(x^2 + 3)(x^2 - 7)}{x^3 - 5}}$

c) $y = \sqrt{\left(\frac{5x^2 + 3x}{8x^3 - 2x^2}\right)^3}$

d) $y = \sqrt[3]{3 + \sqrt{x - \frac{2}{x^3}}}$

33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \log(x^5 - 7x^3)^{12}$

b) $y = \log_2(3x^3 - 5x^2)^7$

c) $y = \ln \sqrt{\frac{(4x^5 - 8x^3)^5}{3x - 2}}$

d) $y = \ln \sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$

34. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = x^{x^5 - 7x^3}$

b) $y = (x+1)^{3x^3 - 5x^2}$

c) $y = e^{(4x^5 - 8x^3)^5}$

d) $y = \sqrt[3]{(x-1)^{(2x^2 + 4x^7)^4}}$

35. Utilizando que la derivada de $y = e^x$ es $y' = e^x$, calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5 - 7x^3}$

b) $y = (e^{3x^3 - 5x^2})^7$

c) $y = e^{(4x^5 - 8x^3)^5}$

d) $y = \sqrt[3]{e^{(2x^2 + 4x^7)^4}}$

36. Recuerda la definición de cosecante: $\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$. Demuestra que: $(\operatorname{cosec}(x))' = -\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$

37. Recuerda la definición de secante: $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. Demuestra que: $(\sec(x))' = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$

38. Recuerda la definición de cotangente: $\cotg(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$. Demuestra que: $(\cotg(x))' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}$

39. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen}(x^5 - 7x^3)$

b) $y = (\operatorname{sen}(3x^3 - 5x^2))^7$

c) $y = \operatorname{sen}^5(x) \cdot \cos^3(x)$

d) $y = \sqrt[3]{\operatorname{sen}(2x^2 + 4x^7)^4}$

40. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \cos(e^{x^5} + 4x^3)$

b) $y = (\cotg(5x^3 - 3x^2))^4$

c) $y = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2))$

d) $y = \sqrt[3]{\operatorname{ch}(\operatorname{sh}(2x+1))^4}$

41. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}$

b) $f(x) = (2-3x)\operatorname{sh}(2-3x)$

c) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\sqrt{4-9\operatorname{sen}x}}{3+2\cos x}$

d) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}x - x\cos x}{\cos x + x\operatorname{sen}x}$

42. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{x+1}$

b) $y = \ln(\arccos x)$

c) $y = \operatorname{arctg}(e^{2x+3})$

d) $y = \arccos(\operatorname{sen}(\cos x))$

43. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}$

b) $y = e^{\arccos \sqrt{x+3}}$

c) $y = \operatorname{sen}(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$

d) $y = \arccos \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

44. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \arg \operatorname{sh} \sqrt{2x+3}$

b) $y = \ln(\arg \operatorname{th}(5x))$

c) $y = \arg \operatorname{ch}(e^{4x-1})$

d) $y = \arg \operatorname{sh}(\arg \operatorname{th}(x))$

45. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \arg \operatorname{sh} \sqrt{\frac{1+\operatorname{sh}x}{1-\operatorname{sh}x}}$

b) $y = \sqrt{e^{\arg \operatorname{ch} \sqrt{x+3}}}$

c) $y = \operatorname{sh}(\arg \operatorname{th} \frac{3x+7}{\sqrt{9-4x^2}})$

d) $y = \arg \operatorname{ch} \frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{9-\operatorname{sen}^2x^2}}$

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

46. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 7x^2 + 5x - 3$ en el punto $x = 2$
47. El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: $y = 0.05x - 0.01x^2$, donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ km.
48. Un coche recorre una distancia e , en kilómetros, a las t horas, siendo $e = 20t + 0.5t^2$. Determina su función velocidad y su función aceleración. ¿Es constante la aceleración? Si sigue a esa velocidad, ¿en qué instante sobrepasa la velocidad máxima permitida de 120 km/h?
49. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 + 3x$. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 - 3x$. ¿Cómo es en $x = 0$? ¿Y en $x = 2$? ¿Y en $x = -2$?
50. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:
 a) $y = 4x^2 + 3$; b) $y = 5x^4 - 2$; c) $y = 3x^3 + 1$; d) $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$; e) $y = 7x^3 - 3x$.
51. Se desea fabricar envases con forma de prisma recto cuadrangular de base cuadrada de forma que el volumen sea de un litro y la superficie empleada sea mínima.
52. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:
 a) $y = 6x^3 - 2x^2 + 5x + 7$; b) $y = x^3 - 3x + 5$; c) $y = |x - 4|$; d) $y = |x + 1| + |x - 2|$.
53. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo $[-4, 3]$ y en el intervalo $[0, 5]$.
54. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo $[-3, 5]$.
55. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de radio $R = 5$ cm. (Ayuda: La altura del cono es igual a $R + x$, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Definición de derivada

1. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x^3$ en el punto $x = 2$.
2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 1$.
3. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 1/x^2$ en $x = 4$.
4. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 3x^2 - 5x + 2$ en el punto de abscisa $x = 1$.
5. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x - 3$ en $x = 2$.

Cálculo de derivadas

6. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
 a) $y = 4x^2 + 2x - 3$ b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5$ c) $y = x^2 - 5x + 2$ d) $y = 8x^7 - 9x^6 - 5x^3$
7. Calcula:
 a) $D(5x^2 + 7x^4 - 3x)$ b) $D(6x^5 - 4x^2 + 7x + 5x^3)$ c) $D(x^5 - 7x^4 + 2x^3)$ d) $\frac{dy}{dx}(3x^3 - 9x^6 - 2x^8)$
8. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
 a) $y = 7x^2 + 3x - 1/x$ b) $y = 5x^3 - 2x^2 + \sqrt{x}$ c) $y = \frac{\sqrt{x}}{(x+3) \cdot (x^2 - 5x + 2)}$ d) $y = \frac{\sqrt{x} \cdot (x+5)}{(x^2 - 5)}$
9. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
 a) $y = 7x^{2/3} + 3x/5 - 8/(3x)$ b) $y = 5x^{3/2} - 2x^{2/3} + 6\sqrt{x}/5$ c) $7y = 4x^{3/3} - 5x^{2/7} + 7/\sqrt{x}$
10. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
 a) $y = \frac{(x-1) \cdot (2x-3)}{x+2}$ b) $y = \frac{(3x^2+4) \cdot (4x-2)}{7x-1}$ c) $y = \frac{(8x+5x^2) \cdot (2x^5-7)}{4x+6}$ d) $y = \frac{(x+9) \cdot (2x-3)}{(x+3) \cdot (x+2)}$
11. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
 a) $y = \sqrt{x^3+5}$ b) $y = \sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}$ c) $y = (5x^3+2)^5$ d) $y = (2x^2+5x)^9$
12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
 a) $y = \sqrt{x^3+5} \cdot (x^7+3x^2)^6$ b) $y = \frac{\sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}}{x+1}$ c) $y = (5x^3+2)^5 \cdot (x^5-6x^8)$ d) $y = \frac{(2x^3-5x^2)^9}{(7x^4-5x^3)^2}$
13. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las funciones siguientes:
 a) $y = (3x)^{x^5-2x^3}$ b) $y = (2x+4)^{5x^3+7x^2}$ c) $y = e^{(2x^5-5x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{(2x+5)(x^4-6x^5)^3}$
14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
 a) $y = e^{x^5+4x^3}$ b) $y = (e^{2x^3-7x^2})^7$ c) $y = e^{(3x^5+5x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}}$
15. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
 a) $y = \ln((7x^5-2x^3)^{12}(2x+3))$ b) $y = \ln \sqrt{(3x^3+2x^2)^3}$ c) $y = \ln \sqrt{\frac{4x^5-7x}{6x-1}}$ d) $y = \ln \sqrt[3]{(x^4-2x^5)^2}$
16. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
 a) $f(x) = \frac{\cos(x)}{3 + \sin(x^2)}$ b) $f(x) = \text{sen}(\text{sh}^3 2x)$ c) $f(x) = \text{ch}(\text{sh}(5x))$ d) $f(x) = \text{th}(2x+3x^2)$
17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
 a) $f(x) = 9\sqrt{\text{sen}^3(5x+2)}$ b) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{3+2\cos(x)}{3-2\cos(x)}}$ c) $f(x) = \text{ch}(\text{sen}(5x-2)^2)$ d) $f(x) = \ln(\cos^2(x-1))$
18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
 a) $y = \cos(x^5-7x^3) \cdot \text{sen}(x^5-7x^3)$ b) $y = \cos^7(3x^3-5x^2) \cdot \text{sen}^5(3x^3-5x^2)$ c) $y = \cos(4x^5-8x^3)^5$ d) $y = \sqrt[3]{\cos(2x^2+4x^7)^4}$
19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
 a) $y = \text{sh}(2e^{x^5}-5x^3)^2$ b) $y = (\text{tg}(5x^3-3x^2))^4$ c) $y = \text{sen}(\cos(\text{tg}(7x^5-3x^3)^2))$ d) $y = \sqrt[3]{\text{ch}(\text{sh}(2x+1))^4}$

20. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{3+2e^{3x}}{3-2e^{3x}}$ b) $f(x) = (3x-5x^2)\operatorname{ch}(3x-5x^2)$ c) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\sqrt{25-14\operatorname{sen}x}}{4+5\cos x}$ d) $f(x) = \frac{\operatorname{sh}x - x\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}x + x\operatorname{sh}x}$

21. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln \sqrt{e^{2\operatorname{sh}x-1}}$ b) $f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{5-3x^2}{5+3x^2}$ c) $f(x) = 7\operatorname{arccos} \frac{4\operatorname{sen}x+3}{5-2\operatorname{sen}x}$ d) $f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{2\cos x}{4\operatorname{sen}x+3\cos x}$

22. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{arcsen}(e^{2x-3})$ b) $y = \sqrt{\ln(\operatorname{arccos}x)}$ c) $y = \operatorname{arctg}(\ln \sqrt[3]{3x-2})$ d) $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{tg}(\operatorname{sen}(5x-1)))$

23. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3+2\operatorname{sen}x}{3-2\operatorname{sen}x}}$ b) $y = e^{\operatorname{arcsen} \sqrt{2x-5}}$ c) $y = \cos(\operatorname{arcsen} \frac{4x-5}{\sqrt{5-3x^2}})$ d) $y = \operatorname{arcsen} \frac{2x}{\sqrt{8-x^2}}$

24. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{5x-7}$ b) $y = \ln(\sqrt{\operatorname{arcsen}(2x+1)})$ c) $y = \operatorname{arcsen}(e^{4x-7})$ d) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{arccos}(\operatorname{sen}(2x-1)))$

25. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{argch} \sqrt{x-2}$ b) $y = \ln(\operatorname{argsh}(2x-3))$ c) $y = \operatorname{argth}(e^{3x-5})$ d) $y = \operatorname{argch} \sqrt{\operatorname{argth}(x)}$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{argch} \sqrt{\frac{3+2\operatorname{ch}x}{3-2\operatorname{ch}x}}$ b) $y = \sqrt{e^{\operatorname{argsh} \sqrt{5x-2}}}$ c) $y = \operatorname{ch}(\operatorname{argsh} \frac{2x-5}{\sqrt{25-9x^2}})$ d) $y = \operatorname{argth} \frac{\cos x}{\sqrt{4-\cos^2 x^2}}$

Aplicaciones de la derivada

27. Calcula las rectas tangentes de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x$ en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

28. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $y = x^3$ en $x = 2$. b) $y = 2x^2 + 4x - 5$ en $x = 1$. c) $y = x^3 - 7x^2 + 3$ en $x = 0$.

29. Indica la pendiente de la recta tangente de:

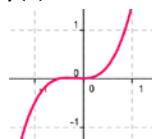
a) $y = x^3 + 3x$ en $x = 3$. b) $y + 2x - 5 = 0$. c) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2$ en $x = 1$.

30. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela:

a) a la recta $y = 0$; b) a la recta $y = 6x$.

31. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt[3]{x^3}$ en $x = 0$.

32. Si $f'(x) = x(3-x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?



33. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

34. Determina la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 3x$ en el punto $A(-1, 2)$. ¿En qué otro punto corta la recta tangente a la función?

35. Determina los coeficientes a , b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.

36. Determina los coeficientes a , b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + c$ y $g(x) = ax - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto $A(1, 0)$.

37. Determina el coeficiente a , para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta $y = x$.

38. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x^2$.

39. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x$.

40. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

41. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$. Calcula sus máximos y mínimos. ¿En qué punto corta al eje de ordenadas? Haz un esbozo de su gráfica.

42. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.
43. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.
44. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo $[-7, 2]$ y en el intervalo $[0, 8]$.
45. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 3|$ en el intervalo $[-3, 3]$.

Problemas

46. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 15t + 0.8t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 5 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?
47. Sabiendo que la aceleración es la derivada de la función velocidad, calcula la aceleración del vehículo del ejercicio anterior a los $t = 0$ segundos, y a los $t = 5$ segundos. ¿Cómo es la aceleración? ¿Es constante o variable?
48. La temperatura, T , en grados, de una bola de hierro que se está calentando viene dada por $T = 200 - 500/t$, donde t es el tiempo en segundos. El radio, r , en mm, de la bola cuando la temperatura es de T grados viene dado por $r = 40 + 0.001T$. ¿A qué velocidad varía el radio cuando la temperatura es de 50° , 75° , 100° ? ¿A qué velocidad varía la temperatura a los 30 segundos? ¿Y para $t = 90$ segundos? ¿A qué velocidad varía el radio a los 10 segundos, a los 30 segundos y a los 90 segundos?
49. La distancia, d , en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?
50. Se ha lanzado desde la superficie de la Tierra una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 24 m/s, y alcanza una altura $h = 24t - 4.9t^2$. A) Determina la aceleración de la gravedad terrestre. B) ¿Hasta qué altura llega la piedra? C) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar dicha altura? D) ¿Durante cuánto tiempo permanece la piedra en el aire? E) Se deja caer ahora la piedra por una grieta y tarda 10 segundos en llegar al fondo, ¿qué profundidad tiene la grieta?
51. Se ha lanzado desde la superficie de la Luna una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 24 m/s, y alcanza una altura $h = 24t - 0.8t^2$. A) Determina la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna. B) ¿Hasta qué altura llega la piedra? C) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar dicha altura? D) ¿Durante cuánto tiempo permanece la piedra en el aire? E) Se deja caer ahora la piedra por una grieta y tarda 20 segundos en llegar al fondo, ¿qué profundidad tiene la grieta?
52. La distancia, d , en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Luna a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 0.83t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caída libre en la Luna al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? En la Luna se está construyendo una antena de transmisión sobre una base de hormigón que puede agrietarse si cayera un tornillo con una velocidad de 20 m/s. Para garantizar que esto no ocurra, ¿cuál debe ser la altura de la antena?
53. La distancia, d , en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Marte a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 1.86t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caída libre en Marte al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Marte.
54. La distancia, d , en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Júpiter a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 11.44t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caída libre en Júpiter al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Júpiter.
55. La función $e = f(t)$ indica el espacio recorrido, e , en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:
- a) $e = t^2 - 4t + 3$ b) $e = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$ c) $e = -t^2 + 4t + 3$ d) $e = (3t - 4)^2$
56. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0.3 m^3 por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?
57. La distancia, d , en metros, recorrida por un trineo que se desliza por una pendiente helada, a los t segundos, viene dada por $d = 0.2t^2 + 0.01t^3$. Determina la velocidad del trineo a los 2, 4, 7 y 15 segundos. Se sabe que si la velocidad del trineo alcanza los 60 km/h le pueden fallar los frenos, ¿cuándo debería comenzar a aplicar los frenos para no perder el control?
58. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x , y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x , recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? Ayuda: Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x .



59. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 150 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie total sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?
60. Al hacer las pruebas de un nuevo medicamento se comprueba que según la dosis, x , en miligramos, que se administre, el porcentaje de curaciones, y , viene dado por: $y = 100 - 80/(x + 5)$. Sin embargo, el medicamento tiene efectos secundarios ya que perjudica al riñón. El número de enfermos a los que el tratamiento produce efectos secundarios aumenta un 2 % por cada miligramo que se aumenta la dosis. ¿Podrías ayudar a determinar la dosis de medicamento adecuada? Razona la respuesta.
61. Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba y alcanza una altura $h = 1.6t - 0.16t^2$ metros al cabo de t segundos. ¿Qué altura alcanza la piedra?

AUTOEVALUACIÓN

- Indica cuál de las siguientes expresiones es la definición de derivada de una función en $x = a$:
 a) $\lim_{b \rightarrow x} \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b + h) - f(b)}{h}$
- La derivada de $y = \sqrt{x} \cdot (x - 1)$ en $x = 1$ es:
 a) 0 b) $1/2$ c) 1 d) 2
- La derivada de $y = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3}$ en $x = 2$ es:
 a) $15/11$ b) $-10/25$ c) $-16/121$ d) $1/3$
- La derivada de $y = e^{x^2 + 3}$ es:
 a) $y' = 2x \cdot e^{x^2 + 3}$ b) $y' = 2(e^x)^2 \cdot e^x$ c) $y' = 3 + e^{x^2} \cdot 2x$ d) $y' = 2e^{x^2}$
- La derivada $y = \cos(x^3)$ es:
 a) $y' = 3(\cos(x))^2 \cdot (-\sin(x^3))$ b) $y' = -\sin(x^3) \cdot 3x^2$ c) $y' = -\sin(x^3) \cdot \cos(3x^2)$ d) $y' = 3(\cos(x))^2 \cdot (-\sin(x))$
- La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5 + 2x + 3x^2 - 2x^3$ en $x = 1$ es:
 a) $y = -2x - 6$ b) $y = x + 8$ c) $y = 2x + 6$ d) $y = 8 + 2x$
- La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 3x^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:
 a) $y = 2x + 3$ b) $y = x + 8$ c) $y = 6x$ d) $y = 0$
- La función $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ en $x = 1$ es:
 a) creciente b) decreciente c) alcanza un mínimo d) alcanza un máximo
- Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x - 4)x$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:
 a) $x < 0$, decreciente; $0 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente
 b) $x < 0$, decreciente; $0 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
 c) $x < 0$, creciente; $0 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
 d) $x < 0$, creciente; $0 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente
- La función $y = 3x^2 - 2x^3$ alcanza los siguientes máximos y mínimos:
 a) (0, 0) máximo y (1, 1) mínimo b) (-1, 5) máximo y (1, 1) mínimo
 c) (6, -324) mínimo y (1, 1) máximo d) (0, 0) mínimo y (1, 1) máximo

RESUMEN

Definición de derivada	$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	
Cálculo de derivadas	Si $f(x) = k$ entonces $f'(x) = 0$ Si $f(x) = x^k$ entonces $f'(x) = kx^{k-1}$ Si $f(x) = g(x) + h(x)$ entonces $f'(x) = g'(x) + h'(x)$ Si $f(x) = kg(x)$ entonces $f'(x) = kg'(x)$ Si $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ entonces $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$ $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ Si $f(x) = \ln(x)$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$ Si $f(x) = a^x$ entonces $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ $f(x) = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$ $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$ $f(x) = \operatorname{tg}(x) \Rightarrow f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$ $f(x) = \operatorname{sh}(x) \Rightarrow f'(x) = \operatorname{ch}(x)$ $f(x) = \operatorname{ch}(x) \Rightarrow f'(x) = \operatorname{sh}(x)$ $f(x) = \operatorname{th}(x) \Rightarrow f'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x)$ $f(x) = \operatorname{arcsen}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $f(x) = \operatorname{arccos}(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $f(x) = \operatorname{arctg}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $f(x) = \operatorname{argsh}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $f(x) = \operatorname{argch}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $f(x) = \operatorname{argth}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$	$y = 7x^3 + 2/x^5 \rightarrow$ $y' = 21x^2 - 10/x^6$ $y = \sqrt{x} \cdot 2x \rightarrow$ $y' = (1/2)\sqrt{x} \cdot 2x + \sqrt{x} \cdot 2$ $y = \frac{3x}{x^2-1} \rightarrow y' = \frac{3 \cdot (x^2-1) - 3x \cdot (2x)}{(x^2-1)^2}$ $y = \sqrt{x^3+2} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x^3+2}} \cdot 3x^2$ $y = \operatorname{arcsen}(e^x) \Rightarrow y' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ $y = \operatorname{arccos}(x^2) \Rightarrow y' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ $y = \operatorname{arctg}(x^3) \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{1+x^6}$ $y = \operatorname{argsh}(e^x) \Rightarrow y' = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ $y = \operatorname{argch}(x^2) \Rightarrow y' = \frac{2x}{\sqrt{x^4-1}}$ $y = \operatorname{argth}(x^3) \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{1-x^6}$
Recta tangente	$y = f(a) + f'(a)(x-a)$	Tangente a $y = x^3 + 2x$ en el punto $(0, 0)$: $y = 0 + 2(x-0) = 2x$.
Crecimiento y decrecimiento	Si $f'(a) > 0$ entonces $y = f(x)$ es creciente en $x = a$. Si $f'(a) < 0$ entonces $y = f(x)$ es decreciente en $x = a$.	$y = x^3 - 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = -1$. • Para $x < -1, y' > 0 \rightarrow y$ creciente. • Para $-1 < x < 1, y' < 0 \rightarrow y$ decreciente • Para $x > 1, y' > 0 \rightarrow y$ creciente
Máximos y mínimos	Si $(a, f(a))$ es un máximo o un mínimo de $y = f(x)$ y existe $f'(a)$ entonces $f'(a) = 0$. Si $f'(a) = 0$ entonces $(a, f(a))$ es un punto crítico. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces $(a, f(a))$ es un mínimo. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ entonces $(a, f(a))$ es un máximo.	$y = x^3 - 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 3 \rightarrow y'' = 6x$ $y'(-1) = 0, y''(-1) < 0$, luego $(-1, 2)$ es un máximo relativo. $y'(1) = 0, y''(1) > 0$, luego $(1, -2)$ es un mínimo relativo.

CAPÍTULO 9: ESTADÍSTICA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA UNIDIMENSIONAL

1. Completa los datos que faltan en la tabla.

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
10	2	0.05	2	0.05
13	4	0.1	6	0.15
16			16	0.4
19	15			
22	6	0.15	37	0.925
25				

2. Completa los datos que faltan en la tabla.

$[l_i, L_i[$	n_i	f_i	N_i
$[0, 10[$	60		60
$[10, 20[$		0.4	
$[20, 30[$	30		170
$[30, 40[$		0.1	
$[40, 50]$			200

3. Clasifica las siguientes variables como cualitativas o cuantitativas, y estas últimas como continuas o discretas.

- Intención de voto de un partido
- Número de correos electrónicos que recibes en un mes.
- Número de calzados.
- Número de kilómetros recorridos en fin de semana.
- Marcas de cerveza
- Número de empleados de una empresa
- Altura
- Temperatura de un enfermo.

4. Muchas personas que invierten en bolsa lo hacen para conseguir beneficios rápidos, por ello el tiempo que mantienen las acciones es relativamente breve. Preguntada una muestra de 40 inversores habituales sobre el tiempo en meses que han mantenido sus últimas inversiones se recogieron los siguientes datos:

10.5 11.2 9.9 15.0 11.4 12.7 16.5 10.1 12.7 11.4 11.6 6.2 7.9 8.3 10.9 8.1 3.8 10.5 11.7 8.4 12.5 11.2
9.1 10.4 9.1 13.4 12.3 5.9 11.4 8.8 7.4 8.6 13.6 14.7 11.5 11.5 10.9 9.8 12.9 9.9

Construye una tabla de frecuencias que recoja esta información y haz alguna representación gráfica.

5. Investigados los precios por habitación de 50 hoteles de una provincia se han obtenido los siguientes resultados.

70 30 50 40 50 70 40 75 80 50 50 75 30 70 100 150 50 75 120 80 40 50 30 50 100 30 40 50 70 50
30 40 70 40 70 50 40 70 100 75 70 80 75 70 75 80 70 70 120 80.

Determinar:

- Distribución de frecuencia de los precios, sin agrupar y agrupando en 5 intervalos de la misma amplitud.
- Porcentaje de hoteles con precio superior a 75.
- ¿Cuántos hoteles tienen un precio mayor o igual que 50 pero menor o igual a 100?
- Representa gráficamente las distribuciones del apartado a).

6. El gobierno desea saber si el número medio de hijos por familia ha descendido respecto a la década anterior. Para ello se ha encuestado a 50 familias respecto al número de hijos y se ha obtenido los datos siguientes.

2 4 2 3 1 2 4 2 3 0 2 2 2 3 2 6 2 3 2 2 3 2 3 3 4 3 3 4 5 2 0 3 2 1 2 3 2 2 3 1 4 2 3 2 4 3 3 2 2 1.

- Construye la tabla de frecuencias con estos datos.
- ¿Cuántas familias tienen exactamente 3 hijos?
- ¿Qué porcentaje de familias tienen exactamente 3 hijos?
- ¿Qué porcentaje de familias de la muestra tiene más de dos hijos? ¿Y menos de tres?
- Construye el gráfico que consideres más adecuado con las frecuencias no acumuladas.
- Construye el gráfico que consideres más adecuado con las frecuencias acumuladas.

7. En un hospital se desea hacer un estudio sobre los pesos de los recién nacidos. Para ello se recogen los datos de los 40 bebés y se tiene:
- 3.2 3.7 4.2 4.6 3.7 3.0 2.9 3.1 3.0 4.5 4.1 3.8 3.9 3.6 3.2 3.5 3.0 2.5 2.7 2.8 3.0 4.0 4.5 3.5 3.5 3.6 2.9
3.2 4.2 4.3 4.1 4.6 4.2 4.5 4.3 3.2 3.7 2.9 3.1 3.5
- Construye la tabla de frecuencias.
 - Si sabemos que los bebés que pesan menos de 3 kilos lo hacen prematuramente ¿Qué porcentaje de niños prematuros han nacido entre estos 40?
 - Normalmente los niños que nacen prematuros que pesan más de 3 kilos y medio no necesitan estar en incubadora. ¿Puedes decir que porcentaje de niños están en esta situación?
 - Representa gráficamente la información recibida.
8. En una finca de vecinos de Benicasim, se reúnen la comunidad de vecinos para ver si contratan a una persona para que les lleve la contabilidad. El resultado de la votación es el siguiente: 25 vecinos a favor de la contratación, 15 vecinos en contra y 5 vecinos se abstienen. Representa la información mediante un diagrama de sectores
9. Se toman ocho mediciones del diámetro interno de los anillos para los pistones del motor de un automóvil. Los datos en mm son: 74.001 74.003 74.015 74.000 74.005 74.002 74.005 74.004
Calcula la media y la mediana de estos datos. Calcula también la varianza, la desviación típica y el rango de la muestra.
10. Dada la distribución de datos 38432 384343 38436 38438 38440 con frecuencias 4, 8, 4, 3, 8, halla la media de la distribución.
11. La distribución de los salarios en la industria turística española es la que figura en la tabla. Calcula:
- El salario medio por trabajador (marcas de clase del último intervalo 20000)
 - El salario más frecuente.
 - El salario tal que la mitad de los restantes sea inferior a él.

$[l_i, L_i[$	n_i
$[0, 1500[$	2145
$[1500, 2000[$	1520
$[2000, 2500[$	840
$[2500, 3000[$	955
$[3000, 3500[$	1110
$[3500, 4000[$	2342
$[4000, 5000[$	610
$[5000, 10000[$	328
≥ 10000	150

12. Calcula la mediana, la moda, primer y tercer cuartil y nonagésimo percentil de la distribución:

x_i	n_i
5	3
10	7
15	5
20	3
25	2

13. Se han diseñado dos unidades gemelas de plantas piloto y han sido puestas en funcionamiento en un determinado proceso. Los resultados de los diez primeros balances en cada una de las unidades han sido los siguientes:
- Unidad A 97.8 98.9 101.2 98.8 102.0 99.0 99.1 100.8 100.9 100.5
Unidad B 97.2 100.5 98.2 98.3 97.5 99.9 97.9 96.8 97.4 97.2
- Haz una representación gráfica de estas muestras.
 - Determina las medias y las varianzas.

14. En cierto barrio se ha encontrado que las familias residentes se han distribuido, según su composición de la forma siguiente:

Composición	Nº de familias
0-2	110
2-4	200
4-6	90
6-8	75
8-10	25

- a) ¿Cuál es el número medio de personas por familia?
- b) ¿Cuál es el tamaño de la familia más frecuente?
- c) Si solo hubiera plazas de aparcamiento para el 75 % de las familias y estas se atendieran por familias de mayor tamaño a menor, ¿qué componentes tendría que tener una familia para entrar en el cupo?
- d) Número de miembros que tienen como máximo el 85 % de las familias.
15. Al lanzar 200 veces un dado se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias.
- | | | | | | | |
|-------|-----|----|----|----|-----|----|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| n_i | a | 32 | 35 | 33 | b | 35 |
- Halla la mediana y la moda de la distribución, sabiendo que la media aritmética es 3.6.
16. Los siguientes datos son medidas de la capacidad craneal de un grupo de homínidos:
84, 49, 61, 40, 83, 67, 45, 66, 70, 69, 80, 58, 68, 60, 67, 72, 73, 70, 57, 63, 70, 78, 52, 67, 53, 67, 75, 61, 70, 81, 76, 79, 75, 76, 58, 31.
- a) Calcula la media y la mediana muestrales.
- b) Halla los cuartiles primero y tercero.
- c) Halla los percentiles cincuenta y noventa.
- d) Calcula el rango muestral.
- e) Calcula la varianza muestral y la desviación estándar muestral.
17. Los siguientes datos proceden de un estudio de contaminación del aire.
6.5 2.1 4.4 4.7 5.3 2.6 4.7 3.0 4.9 8.6 5.0 4.9 4.0 3.4 5.6 4.7 2.7 2.4 2.7 2.2 5.2 5.3 4.7 6.8 4.1 5.3 7.6
2.4 2.1 4.6 4.3 3.0 4.1 6.1 4.2
- a) Construye un histograma.
- b) Determina los cuartiles.
- c) Calcula la media y la desviación típica.

2. ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL. COVARIANZA

18. Los datos siguientes son las calificaciones obtenidas por los estudiantes de un grupo de 25 de 1º de bachillerato en las asignaturas de Matemáticas y Lengua.

Matemáticas	4	5	5	6	7	7	7	7	7	7	8	8
Lengua	3	5	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7
Matemáticas	8	8	8	8	9	9	9	9	9	10	9	8
Lengua	8	8	8	8	8	8	8	10	10	10	9	9

- a) Escribe la tabla de frecuencias conjunta.
- b) Proporción de estudiantes que obtiene más de un cinco en ambas asignaturas, proporción de estudiantes que obtiene más de un cinco en Matemáticas, proporción de estudiantes que obtiene más de un cinco en Lengua.
- c) ¿Son independientes las calificaciones de Matemáticas y Lengua?
- d) Representa gráficamente.
- e) Calcula el coeficiente de correlación.

19. Para realizar un estudio sobre la utilización de una impresora en un determinado departamento, se midió en un día los minutos transcurridos entre las sucesivas utilizaciones X y el número de páginas impresas Y , obteniéndose los siguientes resultados.

X	9	9	4	6	8	9	7	6	9	9	9	9	9	10	9	15	10	12	12	10	10	12	10	10	12	12
Y	3	8	3	8	3	8	8	8	3	8	12	12	20	8	20	8	8	20	8	8	12	8	20	20	3	3

- Escribe la distribución de frecuencias conjunta. Porcentaje de veces que transcurren más de nueve minutos desde la anterior utilización y se imprimen menos de doce páginas. Número de veces que se imprimen menos de doce páginas y transcurren nueve minutos desde la utilización anterior.
- Frecuencias marginales. Veces que se imprimen como mucho doce páginas. Número de páginas que se imprimen en el 80 % de las ocasiones.
- Calcula la distribución del número de páginas impresas condicionada a que han transcurrido nueve minutos entre sucesivas utilizaciones.
- Dibuja el diagrama de dispersión.

20. Las estaturas de los 30 niños nacidos en una maternidad durante una semana fueron los siguientes:

Estatura	50	51	53	50	51	48	50	49	52	52	49	50	52	51	52
Peso	3.2	4.1	4.5	3.0	3.6	2.9	3.8	3.8	3.6	3.9	3.0	3.8	4.1	3.5	4.0

49	50	51	52	53	52	52	51	50	51	54	50	51	51	51
3.1	3.3	3.9	3.7	4.1	4.2	3.5	3.8	3.6	3.4	4.6	3.5	3.6	3.1	4.0

- Construye una tabla de doble entrada, agrupando los pesos en intervalos de 0.5 kg.
- ¿Es la estatura independiente del peso?

21. En el examen de una asignatura que consta de parte teórica y parte práctica, las calificaciones de nueve alumnos fueron:

Teoría	5	7	6	9	3	1	2	4	6
Práctica	6	5	8	6	4	2	1	3	7

Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación lineal. Dibuja la nube de puntos. Comenta los resultados.

22. Se desea investigar el ganado caprino y el ganado ovino de un país. En la tabla de doble entrada adjunta se presentan los resultados de un estudio de 100 explotaciones ganaderas, seleccionadas aleatoriamente del censo agropecuario. Se proporcionan las frecuencias conjuntas del número de cabezas (en miles) de cabras X y ovejas Y que poseen las explotaciones.

X / Y	0	1	2	3	4
0	4	6	9	4	1
1	5	10	7	4	2
2	7	8	5	3	1
3	5	5	3	2	1
4	2	3	2	1	0

- Halla las medias, varianzas y desviaciones típicas marginales.
- Halla el número medio de ovejas condicionado a que en la explotación hay 2000 cabras.
- Halla el número medio de cabras que tienen aquellas explotaciones que sabemos que no tienen ovejas.
- Halla la covarianza y el coeficiente de correlación entre ambas variables.
-

23. El volumen de ahorro y la renta del sector familias en millones en euros constantes de 2005 para el periodo 2005-2014 fueron.

Años	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
Ahorro	1.9	1.8	2.0	2.1	1.9	2.0	2.2	2.3	2.7	3.0
Renta	20.5	20.8	21.2	21.7	22.1	22.3	22.2	22.6	23.1	23.5

- Recta regresión del ahorro sobre la renta.
- Recta de regresión de la renta sobre el ahorro.
- Para el año 2015 se supone que la renta era de 24.1 millones de euros. ¿cuál será el ahorro esperado para el año 2015?
- Estudiar la fiabilidad de la predicción anterior.

24. Se midió el tiempo en segundos que tardaron en grabarse los mismos 24 ficheros en un lápiz USB X y en un disco duro exterior Y .

X	1.2	1	1.1	0.5	1.1	1.5	1	1.4	1.4	1.3	0.4	0.3
Y	1.3	1.1	1.2	0.4	1.2	1.4	1.1	1.6	1.6	1.5	0.4	0.3

X	0.3	1.5	1.4	1.1	1.2	1.2	0.4	0.5	1.3	1.5	1.2	0.2
Y	0.3	1.6	1.3	1.1	1.3	1.1	0.4	0.4	1.4	1.6	0.9	0.3

- Construye la tabla de frecuencias conjunta. ¿Cuál es el porcentaje de ficheros que tardan menos de 1.5 segundos en el primer tipo y más de 1.4 en el segundo? ¿Cuántos ficheros tardan en grabarse entre 0.6 y 1.2 segundos en el primer tipo de memoria? ¿Cuánto tiempo tardan como mucho en grabarse al menos el 90 % de los ficheros en el segundo tipo de memoria?
- Halla la tabla de frecuencias condicionadas de los tiempos del segundo tipo de memoria de aquellos programas que tardaron 1.2 en el primer tipo de memoria. ¿Cuál es la proporción de estos programas que tardan en grabarse más de 1.5 segundos en el segundo tipo de memoria?
- Representa gráficamente los datos y comenta el resultado obtenido.
- Si un fichero tarda 0.8 segundos en grabarse en el primer tipo de memoria, ¿cuántos segundos tardara en grabarse en el segundo tipo? Dar una medida de fiabilidad. ¿Confirma esta medida lo comentado en el apartado c)?

25. De un muelle se cuelgan pesos y obtenemos los alargamientos siguientes.

Peso gr X	0	10	30	60	90	120	150	200	250	350
Alargamiento cm Y	0	0.5	1	3	5	6.5	8	10.2	12.5	18

Encuentra la recta de regresión de Y sobre X y estima el alargamiento que se conseguirá con pesos de 100 y 500 gr. ¿Cuál de las dos estimaciones es más fiable?

26. La tabla siguiente muestra el número de gérmenes patógenos por centímetro cubico de un determinado cultivo según el tiempo transcurrido.

Número de horas	0	1	2	3	4	5
Número de gérmenes	20	26	33	41	47	53

- Calcula la recta de regresión para predecir el número de gérmenes por centímetro cubico en función del tiempo.
- ¿Qué cantidad de gérmenes por centímetro cubico es previsible encontrar cuando transcurran 6 horas? ¿Es buena esta predicción?

27. En un depósito cilíndrico, la altura del agua que contiene varía a medida que pasa el tiempo según los datos recogidos en la tabla:

Tiempo: h	8	22	27	33	50
Altura: m	17	14	12	11	6

- Encuentra el coeficiente correlación entre el tiempo y la altura. Da una interpretación de él.
- ¿Qué altura se alcanzara cuando hayan transcurrido 40 horas?
- Cuando la altura alcanza 2 m suena una alarma. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que suene la alarma?

28. La evolución del IPC (índice de precios al consumo) y la tasa de inflación en los meses indicados de un determinado año, va ser:

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
IPC	0.7	1.1	1.7	2	1.9	1.9
Tasa inflación	6	6	6.3	6.2	5.8	4.9

- Representa la nube de puntos.
- Calcula el coeficiente de correlación entre el IPC y la tasa de inflación.
- ¿Se puede estimar la tasa de inflación a partir del IPC?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Estadística descriptiva unidimensional

1. Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m^3 durante 10 semanas, en un municipio pequeño:
25.5, 27.1, 31.8, 34.2, 38.9, 21.3, 28.7, 33.2, 36.5, 39.6

Calcula:

- Las medidas de **centralización**: la media, mediana, moda
- Las medidas de **dispersión**: desviación típica, varianza, coeficiente de variación, valor mínimo, valor máximo, recorrido, primer cuartil, tercer cuartil e intervalo intercuartílico.
- Haz una representación gráfica en **serie temporal**, que permita observar tendencias, ciclos y fluctuaciones. Recuerda que en una serie temporal, en el eje de abscisas está el tiempo de observación y en el eje de ordenadas la magnitud de observación.

2. Una compañía de seguros desea establecer una póliza de accidentes. Para ello, selecciona al azar a 100 propietarios y les pregunta cuántos euros han gastado en reparaciones del automóvil. Se han agrupado en intervalos los valores de la variable obtenidos:

Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Número de personas	20	20	10	20	20	10

- Calcula las marcas de clase y escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.
- Representa los datos en un diagrama de barras, otro de líneas y uno de sectores.
- Representa un histograma de frecuencias relativas. *Cuidado*: Los intervalos no son todos iguales.
- Calcula la media y la desviación típica.
- Calcula la mediana y los cuartiles.

3. Se ha preguntado a 40 alumnos por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido

Número de hermanos	0	1	2	3	4	5	6 o más
Número de veces	5	15	7	6	4	2	1

- Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas y un diagrama de líneas de frecuencias relativas.
- Calcula la media, la mediana y la moda.

4. Se ha preguntado a 50 estudiantes de 1º de Bachillerato por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido:

Número de hermanos	0	1	2	3	4	5	6 o más
Número de veces	8	19	8	7	5	2	1

- Representa los datos en un diagrama de barras de frecuencias absolutas, en un diagrama de líneas de frecuencias relativas, y en un diagrama de sectores.
- Haz un histograma.
- Calcula la media, la mediana y la moda. Calcula los cuartiles.
- Calcula la varianza, la desviación típica, el recorrido y el intervalo intercuartílico.

Utiliza una hoja de cálculo con el ordenador

5. Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m^3 durante las 52 semanas de un año, en un municipio pequeño:

25.5, 27.1, 31.8, 34.2, 38.9, 21.3, 28.7, 33.2, 36.5, 39.6, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 26.7, 29.6, 31.3, 30.5, 28.3, 29.1, 26.7, 25.2, 24.5, 23.7, 25.4, 27.2, 31.7, 34.5, 38.4, 21.2, 28.1, 33.7, 36.8, 39.9, 31.7, 34.4, 38.2, 21.9, 28.1, 33.5, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 25.9, 24.1, 23.2, 23.6, 26.4.

Calcula, utilizando Excel u otra hoja de cálculo:

Parámetros estadísticos

- Las medidas de centralización: la media, mediana, moda
- Las medidas de **dispersión**: desviación típica, varianza, coeficiente de variación, valor mínimo, valor máximo, recorrido, primer cuartil, tercer cuartil e intervalo intercuartílico.
- Otros coeficientes: coeficiente de asimetría y coeficiente de curtosis que encuentres. Investiga las posibilidades del ordenador para obtener parámetros estadísticos.
- Haz una representación gráfica en **serie temporal**, que permita observar tendencias, ciclos y fluctuaciones. Recuerda que en una serie temporal, en el eje de abscisas está el tiempo de observación y en el eje de ordenadas la magnitud de observación.

6. Los datos de la práctica anterior se quieren representar en un histograma para mejor determinar su distribución. Para ello:
- Indica el número total de datos, N , el menor valor: X_m , el mayor valor, X_M , y el recorrido R .
 - La cantidad de barras del histograma, k , se suele tomar, para menos de 50 datos, entre 5 y 7. Para N entre 50 y 100, entre 6 y 10. Para N entre 100 y 250, entre 7 y 12. Y para N mayor de 250, entre 10 y 20. En este caso N es igual a 52, luego el número de barras podría ser entre 6 y 10. Al dividir R entre 10 se obtiene 1,87 que sería el intervalo de clase. Para facilitar

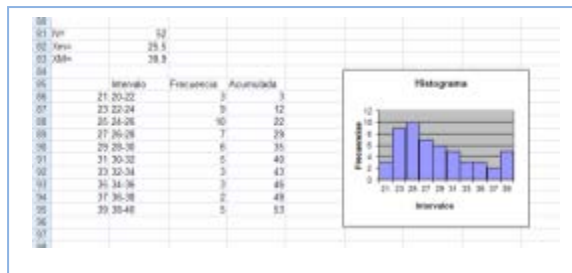
la división en clases fijamos el intervalo de clase, h , en 2, y el número de barras, k , en 10. Para no tener valores en los límites de clase tomamos el inicio del primer intervalo en 20. Así, los intervalos son: (20, 22), de valor central: 21; [22, 24), de valor central 23... Ahora ya se puede construir la tabla de frecuencias y dibujar el histograma.

- Calcula y representa en el histograma los puntos m , $m \pm s$, $m \pm 2s$, $m \pm 3s$, donde m y s son la media y la desviación típica, respectivamente

✚ Vamos a investigar qué ocurre al hacer un cambio de variables. Dijimos que si consideramos $y_i = a + bx_i$ siendo a y b dos constantes cualesquiera, la nueva media aritmética quedaría $\bar{y} = a + b\bar{x}$.

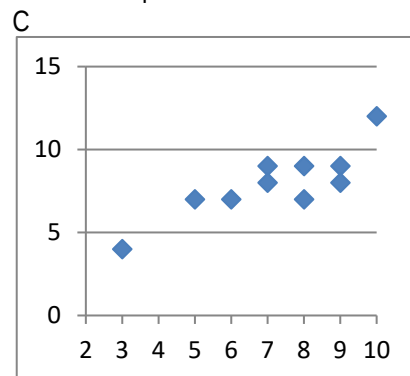
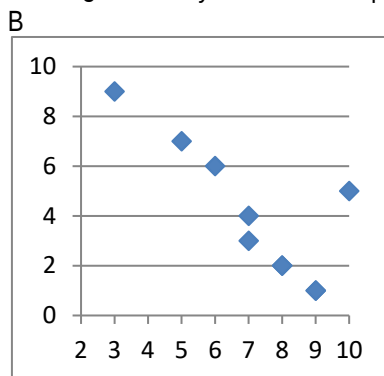
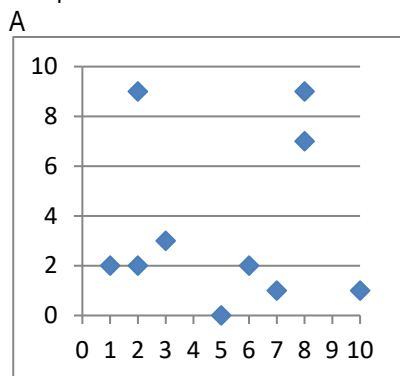
- Abre Excel. Introduce los datos: $X = 255, 271, 318, 342, 389, \dots$ en la columna A, a partir de la fila 11. ¿Qué cambio de variable se ha hecho? Observa: $x = X/10$.
- En la columna C, a partir de la fila 11 escribe los límites de clase, en la columna D el valor medio, en la columna E vamos a contar las frecuencias absolutas y en la columna F las frecuencias acumuladas. Utiliza la función CONTAR.SI para contar. Por ejemplo, escribe en E11, CONTAR.SI(A11:A63; <220). En F11 escribe =E11. En E12 escribe CONTAR.SI(A11:A63; <240)-F11. Completa la tabla de frecuencias. Escribe títulos en la fila 10.
- Calcula la media y la desviación típica. Para ello escribe en la fila 3 y 4, columna B, las funciones =PROMEDIO(A11:A63) y =DESVEST(A11:A63). Escribe los resultados con 2 decimales.
- ¿Cómo obtienes ahora la media y la desviación típica de los datos reales? ¿Cómo deshaces el cambio? Si no lo recuerdas, o no tienes seguridad, invéstalo. Calcula la media y la desviación típica, antes y después del cambio. Escribe este resultado, en general, para un cambio de variables lineal $y = ax + b$.
- Dibuja el histograma. No olvides nunca indicar las unidades en ambos ejes, y toda la información que ayude a comprender el gráfico. Añade siempre el tamaño, N , y los valores de la media y la desviación típica.
- Discute el resultado. ¿Es grande la dispersión? La distribución, ¿es simétrica?

✚ Otra investigación: Vamos a investigar la distribución de la media. Para ello vamos a tomar muestras de tamaño 5. Utiliza la columna G. En G11 escribe =PROMEDIO(B11:B15), en G12 la media de B16 a B20, y así hasta el final. Tenemos calculadas las 10 medias de muestras de tamaño 5. Calcula la media y la desviación típica de estas medias. Compara con los resultados anteriores. Escribe en tu cuaderno las conclusiones.



Estadística descriptiva bidimensional

- En una muestra de 10 personas miramos su color de ojos y pelo y encontramos que hay 5 morenos de ojos marrones, 1 moreno de ojos verdes, 3 rubios de ojos azules y 1 rubio de ojos verdes. A) Representa en una tabla de doble entrada esta situación. B) Escribe la tabla de frecuencias relativas. C) Escribe las frecuencias absolutas y relativas marginales. D) Escribe la distribución de frecuencias condicionadas.
- Lola ha calculado los coeficientes de correlación de las tres nubes de puntos adjuntas, y ha obtenido: -0.8 , 0.85 y 0.03 , pero ahora no recuerda cuál es de cada una. ¿Puedes ayudar a decidir qué coeficiente corresponde con cada nube?



9.

10. En una tienda quieren estudiar las ventas del pan de molde en función del precio. Para ello prueban cada semana con un precio distinto y calculan las ventas realizadas. Han obtenido los siguientes datos:

Precio (euros)	0.5	0.7	1	1.2	1.3	1.5	1.7	1.8	2
Ventas (medias)	20.2	19.2	18.1	15.3	11.6	6	4	0	0

- Representa los datos en un diagrama de dispersión (nube de puntos) e indica a qué conclusiones crees que se va a llegar.
 - Calcula la covarianza, el coeficiente de correlación y la recta de regresión.
 - Deciden poner un precio de 1.4 euros, ¿cuáles opinas que serían las ventas medias semanales?
11. Preguntamos a 10 estudiantes de 1º de Bachillerato por sus calificaciones en Matemáticas, por el número de minutos diarios que ven la televisión, por el número de horas semanales que dedican al estudio, y por su estatura en centímetros. Los datos se recogen en la tabla adjunta.

Calificaciones de Matemáticas	10	3	8	8	5	10	10	8	5	8
Minutos diarios que ve la TV	0	90	30	20	70	10	0	20	60	30
Horas semanales de estudio	15	0	10	10	10	15	15	10	5	5
Estatura (en cm)	175	166	155	161	161	177	182	177	167	172

Queremos estudiar la relación entre las calificaciones de Matemáticas y las otras tres variables. Para ello dibuja los diagramas de dispersión, y calcula los coeficientes de correlación y las rectas de regresión.

12. Una compañía aérea realiza un estudio sobre la relación entre las variables X , tiempo de un vuelo, en horas; e Y , consumo de combustible (gasóleo) para dicho vuelo, en litros, y se han obtenido los siguientes datos.

X (horas)	0.5	1	1.5	2	2.5	3
Y (litros)	2250	3950	5400	7300	8500	10300

- Representa los datos en un diagrama de dispersión.
 - Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación entre ambas variables. Interpreta los resultados.
 - Calcula la ecuación de las rectas de regresión.
13. Haz un trabajo. Pasa una encuesta a tus compañeros y compañeras de clase. Elige una muestra de 10 personas y hazles dos preguntas con datos numéricos, como por ejemplo, cuánto mide su mano, qué número de zapato calza, el número de libros que lee en un mes, el número de horas que ve la televisión a la semana, dinero que gasta al mes en comprar música, la calificación en Matemáticas de su último examen... Representa los datos obtenidos en una tabla de doble entrada. Haz un estudio completo. Puedes utilizar el ordenador:
- Escribe en tu cuaderno una tabla de doble entrada de frecuencias absolutas, frecuencias relativas. Obtén las distribuciones marginales y condicionadas.
 - Con las distribuciones unidimensionales, dibuja los diagramas de barras, diagramas de líneas y diagramas de sectores. Calcula las medias, medianas y modas. Calcula las varianzas y las desviaciones típicas. Calcula los cuartiles y los intervalos intercuartílicos.
 - Con las distribuciones bidimensionales, dibuja un diagrama de dispersión, y calcula la covarianza, el coeficiente de correlación y la recta de regresión.
 - Reflexiona sobre los resultados y escribe un informe.

Utiliza una hoja de cálculo con un ordenador

14. El objetivo de esta práctica es estudiar la dispersión entre dos variables, mediante una nube de puntos o diagrama de dispersión, el coeficiente de correlación y la recta de regresión.

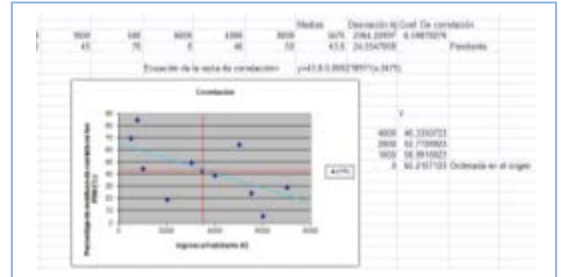
En 10 países se anotan los ingresos medios, en euros, por habitante y año, y el porcentaje medio en los residuos sólidos de comida.

Se obtiene:

x_i (€)	750	5000	7000	2000	5500	1000	500	6000	4000	3000
y_i (%)	85	65	30	20	25	45	70	6	40	50

a) Abre una hoja de cálculo. Copia los datos. Calcula la media y la desviación típica de las x , y la media y la desviación típica de las y .

b) Representa la nube de puntos. Selecciona los datos, incluyendo a las medias. Aprieta el botón de asistente de gráficos y elige **XY (Dispersión)**. En títulos escribe como **Título del gráfico Correlación**, en **Eje de valores (X)** describe la variable x sin olvidar decir las unidades, escribe: *Ingresos/habitante (€)*, en **Eje de valores (Y)** describe la variable y sin olvidar decir las unidades, escribe: *Porcentaje de residuos de comida en los RSU (%)*. En **Leyenda** elige no mostrar leyenda.



c) Observa que si $x - \bar{x}$ e $y - \bar{y}$ tienen el mismo signo quedan en los cuadrantes I y III y si lo tienen distinto en II y IV. Cuenta los puntos que quedan en los cuadrantes I y III, cuenta los que quedan en los cuadrantes II y IV. Nos puede dar una idea de la correlación. ¿Va a ser positiva o negativa? ¿Es una correlación fuerte o débil? ¿Entre que valores puede variar el coeficiente de correlación? Estima a ojo un valor para esa correlación.

d) Organiza en Excel una hoja de cálculo que te permita calcular la correlación. Escribe los datos en las filas 3 y 4. En L3 y L4 calcula las medias utilizando la función **PROMEDIO**. En M3 y M4 calcula la desviación típica utilizando la función **DESVEST**. En N3 calcula el coeficiente de correlación, utilizando la función:

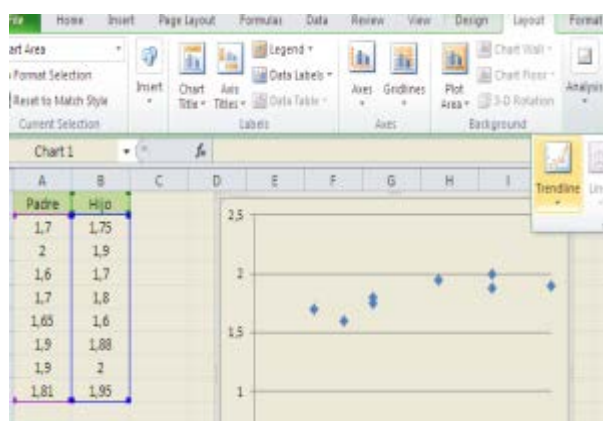
COEF.DE.CORREL(B3:K3;B4:K4)

e) Ahora vamos a mejorar nuestro gráfico. Observa que si colocas al ratón encima de un punto indica las coordenadas. Traza las rectas $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ que indican las medias. Utiliza para ello la paleta de dibujo. Dibújalas en color rojo.

f) La recta de regresión es la recta que hace mínimas las distancias de la nube de puntos. Es la recta: $y = \bar{y} + \rho \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x})$. Calcula en N4 la pendiente de la recta. Escribe la ecuación de la recta. Observa el gráfico. ¿Cómo la habrías estimado a ojo? Evalúa la pendiente y la ordenada en el origen.

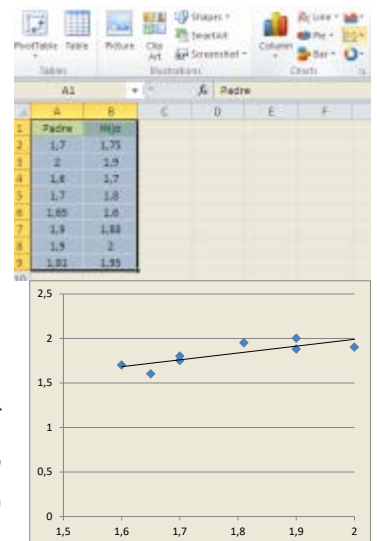
15. Se recoge en una tabla la altura (en metros) de un padre y de la de su hijo con 15 años de edad.

Padre	1.7	2	1.6	1.7	1.65	1.9	1.9	1.81
Hijo	1.75	1.9	1.7	1.8	1.6	1.88	2	1.95



a) Utiliza el ordenador para representar el diagrama de dispersión. Copia los datos en una hoja de cálculo en las columnas A y B. Señala las dos series y elige **insertar gráfico de dispersión**. Automáticamente verás que aparece el diagrama de dispersión (nube de puntos). Juega con las opciones para modificar el título, el formato, la escala de los ejes...

b) Dibuja la recta de regresión. Pincha sobre un punto de la nube, y elige "Agregar línea de tendencia". Para que dibuje el ordenador la recta de regresión la línea de tendencia debe ser **Lineal**. En la pantalla que aparece marcamos la casilla que dice: "Presentar ecuación en el gráfico" y la casilla que dice "Presentar el valor de R cuadrado en el gráfico". Al final, si lo has hecho bien, el dibujo debe ser más o menos algo similar a esto:



c) Utiliza la recta para determinar que altura del hijo correspondería a una altura del padre de 1.75 m.

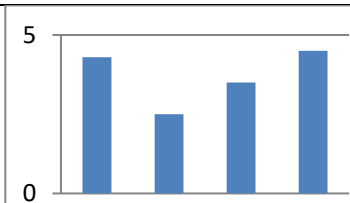
AUTOEVALUACIÓN

Realizamos una prueba a 20 aspirantes a un puesto de grabador consistente en un dictado con cierto tiempo de duración (en minutos) y luego contar el número de errores cometidos al transcribirlo a ordenador. Los resultados fueron.

Tiempo	7	6	5	4	5	8	7	8	9	6	5	8	6	8	7	8	7	6	6	9
Errores	8	7	6	6	7	10	9	9	10	8	6	10	8	9	8	8	7	8	6	8

1. La media de errores es
a) 6.75 b) 7 c) 7.9 d) 6.9
2. La media de tiempos es
a) 6.75 b) 7 c) 7.9 d) 6.9
3. La desviación típica de errores es
a) 1 b) 1.41 c) 1.33 d) 1.2
4. La desviación típica de tiempos es
a) 1 b) 1.41 c) 1.33 d) 1.2
5. El primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil de los tiempos valen respectivamente:
a) 7, 8 y 9 b) 5, 6 y 7 c) 5.9, 6.1 y 7.3 d) 6, 7 y 8
6. El primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil de los errores valen respectivamente:
a) 7, 8 y 9 b) 5, 6 y 7 c) 6.5, 7.5 y 8.5 d) 6, 7 y 8
7. La covarianza es:
a) 1.21 b) -1.5 c) -1.4 d) 1.425
8. El coeficiente de correlación es:
a) 0.8 b) -0.8 c) -0.7 d) 0.7
9. La recta de regresión lineal de los errores sobre el tiempo es:
a) $y = 3.1 - 0.71x$ b) $y = 3.1 + 0.71x$ c) $y = 0.4 + 0.8x$ d) $y = 0.4 - 0.8x$
10. La recta de regresión lineal del tiempo sobre los errores es:
a) $y = 3.1 - 0.71x$ b) $y = 3.1 + 0.7$ c) $y = 0.4 + 0.8x$ d) $y = 0.4 - 0.8x$

RESUMEN

		Ejemplos
Histograma	Representación gráfica de los datos agrupados en intervalos.	
Media aritmética	$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i n_i}{n} = \sum_{i=1}^k x_i f_i$	$\bar{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 21 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1}{50} = \frac{126}{50} = 2,52$
Mediana	Valor tal que en la distribución hay tantos datos menores que él como mayores que él.	
Moda	Dato con mayor frecuencia, el que más veces se repite.	
Varianza	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \cdot f_i}{n} - \bar{x}^2$	
Desviación típica	$s = \sqrt{\text{Varianza}}$	
Covarianza	$S_{xy} = \frac{\sum_i \sum_j (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \cdot n_{ij}}{n} = \frac{\sum_i \sum_j x_i \cdot y_i \cdot n_{ij}}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}$	
Coeficiente correlación	$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{s_x \cdot s_y} \quad -1 \leq r \leq 1$	
Dependencia lineal	$r = -1$ dependencia funcional lineal negativa $-1 < r < 0$ dependencia negativa $r = 0$ no existe dependencia lineal, ni funcional $0 < r < 1$ dependencia positiva $r = 1$ dependencia funcional lineal positiva	
Recta regresión Y sobre X	$y = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{s_x^2} (x - \bar{x})$	