ALGEBRA

Matrices y determinantes

1.- Sea A una matriz cuadrada y sea A´ la matriz que se obtiene de intercambiar en A las filas primera y segunda. Es sabido que entonces se verifica que det(A´) = - det(A). Justifíquese este resultado. (Jun 1996 – 2 ptos)

2.- a) Hallar razonadamente los valores del parámetro p para los que la matriz A tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$$

b) Hallar la inversa para p = 2. (Jun 1996 – 2 ptos)

3.- Obtener las matrices A y B tales que cumplen las siguientes condiciones:

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$ (Sep 1996 – 2 ptos)

4.- Hallar el valor del determinante de orden 4 cuyo elemento del lugar i, j (fila i = 1, 2, 3, 4; columna j = 1, 2, 34) vale (i+j) 2^{i+j}. (Sep 19996 – 3 ptos)

5.- Obtener el determinante de A en función de A_1, siendo:

$$A = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a'+b' & b'+c' & c'+a' \\ a''+b'' & b''+c'' & c''+a'' \end{vmatrix} \qquad A_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$ (Jun 1997 – 2 ptos)

6.- Sean A y M las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Determinar las relaciones entre a, b, c y d para que se cumpla AM = MA. (Jun 1997 – 2 ptos)

7.- Se consideran las matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde λ es cualquier número real.

a) Encontrar las valores de λ para los que AB es invertible. (1 pto)
b) Determinar los valores de λ para los que BA es invertible. (1 pto)
c) Dados a y b números reales cualesquiera, ¿puede ser el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ compatible determinado?. (1 pto) (Jun. 1999, 3 ptos)

8.- Hallar en función de a el valor del siguiente determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} \qquad \text{(Sep. 1999, 2 ptos)}$$

9.- Para una matriz cuadrada se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue A y B son matrices cuadradas 2 x 2.

a) Comprobar que se verifica Traza (A + B) = Traza (A) + Traza (B) (0,5 ptos)
b) Comprobar que Traza(AB) = Traza(BA) (1 pto)
c) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener AB – BA = I, donde I denota la matriz identidad. (1 pto) (Jun 2000 – 3 ptos)
d) Encontrar dos matrices A y B para las que Traza(AB) ≠ Traza(A).Traza(B). (0,5 ptos)

10.- Sea k un número natural y sean las matrices: A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcular A^k. (1 pto)
b) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^kX = BC$. (1 pto) (Jun. 2001, 2 ptos)

11.- Comprobar que las siguientes matrices tienen el mismo determinante

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad \text{2 ptos}$$

12.- Sea la matriz a = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcular A^{-1}. (1 pto)
b) Resolver el sistema: $A \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix}$ (1 pto)

13.- Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que verifica la igualdad $A^3 + I = 0$. (1 punto)
b) Justificar que A tiene inversa y obtenerla. (1 punto)
c) Calcular A^{100}. (1 punto) (Sep 2001)

14.- Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$, donde I es la matriz identidad.

a) Demostrar que A es no singular (detA≠0) y expresar A^{-1} en función de A e I. (1 pto)
b) Calcular dos números p y q tales que $A^3 = pI + qA$. (1 pto)
c) Si A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ cumple la relación de partida, calcular el valor de k. (1 pto)

15.- Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcular A^{-1}. (1 pto)

b) Resolver la ecuación matricial AX = BA. (1 pto)

16.- Calcular el rango de la matriz A según los valores del parámetro real a:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$ (Junio 2003)

17.- Sea A una matriz real cuadrada de orden n que verifica la igualdad A^2 = I, siendo I la matriz identidad de orden n. Se pide:

a) (1 pto) Expresar A^{-1} en términos de A.

b) (1 pto) Expresar A^n en términos de A e I, para cualquier número natural n.

c) (1 pto) Calcular a para que A^2 = I, siendo A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ (Sep 2003)

18.- Sea M una matriz real cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Se pide:

a) (1 pto) Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresar M^{-1} en términos de M e I.

b) (1 pto) Expresar M^3 como combinación lineal de M e I.

c) (1 pto) Hallar todas las matrices de la forma M = $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado. (Muestra 2003)

19.- (Puntuación máxima 2 ptos). Halla todas las matrices X tales que XA = AX, siendo A la matriz: A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Muestra 2003)

20.- a) (1 punto) Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad A + B = AB. Comprobar que entonces se tiene la fórmula $(I - B)^{-1} = -B^{-1}A$.

b) (1 punto) Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, hallar la matriz B para la cual se verifica A + B = AB. (Septiembre 2003)

21.- Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 pto) Hallar A^{-1}

b) (1 pto) Hallar la matriz X, tal que: $AXA^t = B$ (junio 2004)

22.- Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) (1 pto) Determinar la matriz inversa de B
b) (1 pto) Determinar la matriz X tal que A = B.X (Sept 2004)

23.- a) (1 pto) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A?

b) (1 pto) Calcular un número k tal que $\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (Sept. 2004)

24.- Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) (1 pto) Comprobar que $A^3 - 2A^2 = 0$
b) (1 pto) Hallar A^n. (Mod 2005) (2 ptos)

25.- Encontrar todas las matrices P tales que: $P^{-1}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (Mod 2005) (2 ptos)

26.- Dada la matriz: M = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (Mod 2005, 2006) (3 ptos)

a) (1,5 ptos) Determinar el rango de M según los diferentes valores de λ
b) (1,5 ptos) Determinar para qué valores de λ existe M^{-1}. Calcularla para $\lambda = 0$.

27.- Hallar una matriz X tal que $A^{-1}XA = B$ siendo A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, y B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(Jun 2005) (2 ptos)

28.- Dadas la matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Sep 2005)

a) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$ (1 pto)
b) Calcular A^5 utilizando las expresiones obtenidas en el apartado anterior (1 pto)
c)Hallar todas las matrices X que satisfacen: $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$ (1 pto)

29.- Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Sep 2005)

a) Hallar A^{10}. (1pto)
b) La matriz inversa de B. (1pto)
c) En el caso particular de k = 0, hallar B^{10}. (1 pto)

30.- Dadas la matrices: A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide: (Modelo 2006)

a) (1 pto) Hallar $(A - I)^2$.
b) (2 ptos) Calcular A^4 y A^{-1} haciendo uso del apartado anterior.

31.- Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices P tales que AP = PA

(Jun 2006, 2 ptos)

32.- Dada la matriz: M = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ (Jun 2006) (3 ptos)

a) (1,5 ptos) Determinar el rango de M según los diferentes valores de a
b) (1,5 ptos) Determinar para qué valores de a existe M^{-1}. Calcularla para a = 2.

33.- Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (sep 2006, 3 ptos)

a) (1 pto) Comprobar que $\det(A^2) = (\det(A))^2$ y que det(A + I) = det(A) + det(I)
b) (0,5 ptos) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple $\det(M^2) = (\det(M))^2$?. Razonar la respuesta
c) (1,5 ptos) Encontrar todas las matrices cuadradas M de orden 2, tales que det(M + I) = det(M) + det(I)

34.- a) (1 pto) Hallar todas las matrices A = $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, distintas de la matriz nula de orden 2, tales que $A^2 = A$.

b) (1 pto) Para cualesquiera de las matrices calculadas en el apartado anterior calcular $M = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{10}$. (sep 2006, 2 ptos)

35.- Estudiar el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro M.

(Junio 2007, 2 ptos)

36.- Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$. Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$.

(Junio 2007, 2 ptos)

37.- Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1,5 ptos) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique AB = BA.
b) (1,5 ptos) Para a = b = c = 1, calcular B^{10}. (Junio 2007, 2 ptos)

38.- Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica $XA^2 + BA = A^2$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (sep 2007, 2 ptos)

39.- Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ (modelo 2008, 3 ptos)

a) (1 pto) Hallar una matriz X tal que $AXA^{-1} = B$
b) (1 pto) Calcular A^{10}.
c) (1 pto) Hallar todas las matrices M que satisfacen $(A – M)(A + M) = A^2 – M^2$

40.- Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \ldots & 1 & 1 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$ (Jun 2008, 3 ptos)

Se pide:
a) (0,5 ptos) Calcular el determinante de la matriz A_2.
b) (0,5 ptos) Calcular el determinante de la matriz A_3.
c) (2 ptos) Calcular el determinante de la matriz A_5.

41.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$, se pide: (Sep 2008, 3 ptos)

a) (1,5 ptos) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.
b) (1,5 ptos) Decir cuando la matriz A es invertible. Calcular la inversa para a = 1.

42.- Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$ (Modelo 2009, 2 ptos)

43.- Si $A = (C_1, C_2, C_3)$ es una matriz cuadrada de orden3 con columnas C_1, C_2, C_3, y se sabe que Det(A) = 4, se pide:
a) (1 pto) Calcular $Det(A^3)$ y Det(3A)
b) (2 ptos) Calcular Det(B) y $Det(B^{-1})$, siendo $B = (2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)$ la matriz cuyas columnas son $2C_3$, $C_1 - C_2$, $5C_1$ (Modelo 2009, 3 ptos)

44.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, se pide: (Junio 2009, 2 ptos)

a) (1 pto) Estudiar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a.
b) (1 pto) Obtener la matriz inversa de A para a = -1.

45.- Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, se pide: (Sep. 2009, 3 ptos)

a) (1,25 ptos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz A es invertible.
b) (0,5 ptos) Determinar los valores de m para los cuales A^{25} es invertible.
c) (1,25 ptos) Obtener la matriz inversa de A para m = -1, si es posible.

46.- Dadas las matrices: A = $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Obtener una matriz X de orden 2 que verifique la ecuación matricial AXB = A + B. (Sep. 2009, 2 ptos)

47.- Obtener, para todo número natural n el valor de: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$ (Modelo 2010)

Sistemas de ecuaciones lineales

1.- Considérese el siguiente sistema de ecuaciones lineales (en él a, b y c son datos; las incógnitas son x, y y z): $\begin{cases} ay+bx=c \\ cx+az=b \\ bz+cy=a \end{cases}$ (Jun 1996 – 2 ptos)

Si a, b yc son no nulos, el sistema tiene solución única. Hallar dicha solución.

2.- Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ y+2z+t=0 \\ 2x+2\lambda y-t=0 \end{array}\right\}$

a) Encontrar los valores de λ para los que el rango de la matriz de los coeficientes es igual a 2. (1,5 ptos)
b) Resolver el sistema anterior para λ = 0. (1,5 ptos) (Jun.1998, 3 ptos)

3.- Un almacenista dispone de tres tipos de café: el A a 980 pts/kg; el B a 875 pts/kg; y el C a 950 pts/kg. Desea hacer una mezcla con los tres tipos de café para suministrar un pedido de 1050 kg a un precio de 940 pts/kg. ¿Cuántos kg de cada tipo de café debe mezclarse sabiendo que debe ponerse del tercer tipo el doble de lo que ponga del primero y del segundo juntos?. (Jun. 1998, 3 ptos)

4.- a) Discutir el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax+2y+6z=0 \\ 2x+ay+4z=2 \\ 2x+ay+6z=a-2 \end{cases}$ según los valores del parámetro a. (2 ptos)

b) Resolverlo para a = 2. (1 pto) (Jun. 1999, 3 ptos)

5.- Un cajero automático contiene 95 billetes de 1000, 2000 y 5000 ptas y un total de 200000 ptas. Si el número de billetes de 1000 es el doble que el número de billetes de 2000, averiguar cuantos billetes hay de cada tipo. (Sep 1999, 2 ptos)

6.- a)Estudiar según los diferentes valores del parámetro el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (a+1)x+2y+z=a+3 \\ ax+y=a \\ ax+3y+z=a+2 \end{cases}.$$ (1,5 ptos)

b) Resolver el sistema en los casos en los que resulte ser compatible determinado. (1,5 ptos) (Sep. 1999, 3 ptos)

7.- Se considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} ax+y+z=(a-1)(a+2) \\ x+ay+z=(a-1)^2(a+2) \\ x+y+az=(a-1)^3(a+2) \end{cases}$

a) Comprobar que es compatible para todo valor de a. (1 pto)
b) Describir en términos geométricos el conjunto de soluciones para a = 1 y para a = -2. (1pto)
c) Resolverlo para a = -2. (1 pto) (Jun 2000 – 3 ptos)

8.- Considerar el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ (\lambda-1)x+y+z=\lambda \\ x+(\lambda-1)y-z=0 \end{array}\right\}$ donde λ es un número real.

a) Discutirlo según los valores del parámetro λ. (1 pto)
b) Resolverlo para λ = 0. (1 pto)
c) Resolverlo para λ = 3. (1 pto) (Sep. 2000, 3 ptos)

9.- a)Discutir en función de los valores de k y resolver el sistema $\begin{cases} x+y+5z=0 \\ 2x-ky=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ (2 ptos)

b)Discutir en función de los valores de λ y resolver en los casos de compatibilidad el sistema

$\begin{cases} x+y+5z=0 \\ 2x-3y=0 \\ x-y+z=0 \\ x+2y+2\lambda z=\lambda \end{cases}$ (1 pto) (Sep.2000, 3 ptos)

10.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x-y+3z=2 \\ 5x-y+az=6 \end{cases}$

a) Discutirlo según los valores del parámetro a. (1 pto)
b) Resolverlo cuando tengan infinitas soluciones. (1 pto) (Jun. 2000, 2 ptos)

11.- Se considera el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Discutirlo para los diferentes valores del parámetro real λ. (1 pto)
b) Resolverlo para λ = -3. (1 pto)
c) Resolverlo para λ = 1. (1 pto) (Jun. 2001, 3 ptos)

12.- a)Discutir en función de los valores de k y resolver cuando tenga más de una solución el sistema: $\begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2x-y+kz=9 \\ x-y-6z=5 \end{cases}$ (1,5 ptos)

b) Si el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ es 2, determinar una combinación lineal nula de los vectores F_1, F_2 y F_3; así como una combinación lineal nula de los vectores columna C_1, C_2, C_3, y C_4. (1,5 ptos)

13.- Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} ax+y+4z=1 \\ -x+ay-2z=1 \\ y+z=a \end{array}\right\}$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro a. (1 pto)
b) Resolver el sistema para a = 2. (1 pto)
c) Resolver el sistema para a = 1. (1 pto) (Sep 2001)

14.- Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Para cada número real λ definimos la matriz B = A - λI, donde I es la matriz identidad 2 x 2.

a) Hallar los valores de λ que hacen que el determinante de B sea nulo. (0,5 ptos)
b) Resolver el sistema B$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para los diferentes valores de λ. (1,5 ptos)

15.- Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años. (2 ptos) (Junio 2002)

16.- Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$, se pide:

a) (1,5 ptos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro
b) (0,5 ptos) Resolver el sistema para a = -1 (Junio 2002)
c) (1 pto) Resolver el sistema para a = 2

17.- Se considera el sistema lineal $\begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ y - z = \lambda \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$

a) (1,5 ptos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.
b) (1 pto) Resolver el sistema en los casos en que sea posible.
c) (0,5 ptos) En el caso λ = 2, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema. (Sep 2002)

18.- Para cada valor del parámetro real k, se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k^2 \end{cases}$$, se pide:

a) (1 pto) Discutir el sistema según los valores de k.
b) (1 pto) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible. (Modelo 2003)

19.- Se considera el sistema: $\begin{cases} 3x + 4y + 3z = 9 \\ mx + 2y + z = 5 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

a) (1,5 ptos) Determinar los valores de m para que el sistema tenga solución única
b) (1,5 ptos) Resolverlo para m = 1. /Sep 2003)

20.- Un mayorista de turismo vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12000€. A una segunda agencia B le vende 10 a destinos nacionales, y 20 a internacionales no comunitarios y cobra 13000€. A una tercera agencia C le vende 10 a destinos nacionales y 10 a extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7000€. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el precio de cada tipo de billete.
b) (0,5 puntos) Por razones de mercado el mayorista se ve obligado a bajar un 20% el precio de los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por ventas a las tres agencias. (Sep 2003)

21.- Discutir según los valores de λ, y resolver en los casos en que sea posible el sistema:

$$\begin{cases} 6x+4y+2\lambda z=2 \\ \lambda x+y-z=2 \\ 5x+3y+3z=2\lambda \end{cases}$$ (3 ptos) (Modelo 2004)

22.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+3y-az=4 \\ x+ay+z=2 \\ x+4y-5z=6 \end{cases}$

a) (2 ptos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.
b) (1 pto) Resolver el sistema cuando tenga infinitas soluciones. (Modelo 2004)

23.- Dado el sistema $\begin{cases} (1-a)x-2y+4z=0 \\ x-(1+a)y+z=0 \\ -x+ay-z=0 \end{cases}$ (Junio 2004)

a) (1,5 ptos) Estudiar la compatibilidad del sistema según los valores de a
b) (1,5 ptos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado

24.- a) (1 pto) Dado el sistema $\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$, escribir una tercera ecuación de la forma ax + by = c, distinta de las anteriores, de manera que el sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

b) (1 pto) Dado el sistema $\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$, escribir una tercera ecuación de la forma ax + by +cz = 1, distinta de las anteriores, de manera que el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas resultante sea compatible indeterminado (Junio 2004)

25.- a) (2 ptos) Discutir el sistema según los diferentes valores de λ.

$$\begin{cases} \lambda x+3y+z=\lambda \\ x+\lambda y+\lambda z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$ (Sep 2004, 3 ptos)

b) (1 pto) Resolver el sistema anterior en le caso λ = 2.

26.- a) (2 ptos) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema $\begin{cases} 2\lambda x + 2y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ 4x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$

b) (1 pto) Resolver el sistema anterior en los casos en los que sea compatible. (Mod 2005)

27.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} -ax + 4y + az = -a \\ 4x + ay - az = a \\ -x - y + z = 1 \end{cases}$

a) (1 pto) Discutir el sistema según los diferentes valores de a
b) (1 pto) Resolverlo para a = 1. (Mod 2005)

28.- Dado el sistema homogéneo: $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ kx - y + 3z = 0 \\ x - 3y + (k+1)z = 0 \end{cases}$ .Averigua para que valores de k tiene soluciones distintas de x = =y = z = 0. Resolverlo en tales casos. (2 ptos) (Mod 2005)

29.- (3 ptos) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} (m-1)x + y + z = 3 \\ mx + (m-1)y + 3z = 2m - 1 \\ x + 2y + (m-2)z = 4 \end{cases}$ (Junio 2005)

a) (1,5 ptos) Discutirlo según los distintos valores de m
b) (1,5 ptos) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado

30.- a) (1 punto). Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$ (Junio 2005)

b) (1 punto) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: 5x + y + αz = β el sistema resultante sea compatible indeterminado.

31.- Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x + 3y - z = k \\ x + 2y + 3z = 2 \\ kx + ky - 4z = -1 \end{cases}$ (Modelo 2006)

a) (2 ptos) Discutirlo según los valores de k.
b) (1 pto) Resolverlo cuando tenga mas de una solución

32.- Dado el sistema homogéneo: $\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$ .Averigua para que valores de k tiene soluciones distintas de x = =y = z = 0. Resolverlo en tales casos. (2 ptos) (junio 2006)

33.- a) Resolver el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$ (1 pto)

b) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4. (1 pto) (Sep 2006)

34.- Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+ky+k^2z=1 \\ x+ky-kz=k^2 \\ -x+ky-k^2z=k^2 \end{cases}$

a) Discutirlo según los diferentes valores de k (2 ptos)
b) Resolverlo para k = -1 (1 pto) (modelo 2007)

35.- Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+(k+1)y+2z=-1 \\ kx+y+z=k \\ (k-1)x-2y-z=k+1 \end{cases}$

a) Discutirlo según los diferentes valores de k (2 ptos)
b) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones (1 pto) (sep 2007)

36.- Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 2x+y-z=5 \end{cases}$ (Sep 2007)

a) (1 punto) Hallar dos constantes a y b de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: ax + y + bz = 1 el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.
b) Clacular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

37.- Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+y+mz=m+2 \\ 2x+(m+1)y+(m+1)z=-m \\ (m+2)x+3y+(2m+1)z=3m+4 \end{cases}$. Se pide:

a) (2 ptos) Discutirlo según los valores de m. (Modelo 2008)
b) (1 pto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

38.- Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x-ay=2 \\ ax-y=a+1 \end{cases}$, se pide: (Jun 2008, 3 ptos)

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.
b) (1 punto) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que y = 2.

39.- Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x-2y+z-3u=-4 \\ x+2y+z+3u=4 \\ 2x-4y+2z-6u=-8 \\ 2x+2z=0 \end{cases}$ (Sep 2008, 2 ptos)

40.- El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, 20 y 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros, es el doble que el número de billetes de 20 euros. (Sep 2008, 2 ptos)

41.- Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-3y=2k \\ 3x-5y=k \end{cases}$, se pide: (Modelo 2009, 2 ptos)

a) (1 pto) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.
b) (1 pto) Resolverlo en los casos en los que sea posible.

42.- Dado el sistema $\begin{cases} 4x+4\lambda y+2z=2\lambda \\ \lambda x+y-\lambda z=\lambda \\ 4\lambda x+4\lambda y+\lambda z=9 \end{cases}$, se pide: (Junio 2009)

a) (2 ptos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.
b) (1 pto) Resolver para λ = -1

43.- Dado el sistema: $\begin{cases} 2x-y=\lambda \\ \lambda x-2y=4 \\ 3x-y=2 \end{cases}$, se pide: (Junio 2009)

a) (1,5 ptos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.
b) (0,5 ptos) resolver el sistema cuando sea posible.

44.- Dado el sistema: $\begin{cases} \lambda x+2y+z=0 \\ \lambda x-y+2z=0 \\ x-\lambda y+2z=0 \end{cases}$, se pide: (Sept 2009, 2 ptos)

a) (1 pto) Obtener los valores del parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de : x = y = z = 0.
b) (1 pto) Resolver el sistema para λ = 5.

45.- Discutir razonadamente en función del parámetro k, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$\begin{cases} x+ky+z=k+2 \\ kx+y+z=k \\ x+y+kz=-2(k+1) \end{cases}$ (Modelo 2010, 2 ptos)

46.- Dado el sistema: $\begin{cases} x+z=2 \\ x+\lambda y-z=4 \\ -\lambda x-y-z=-5 \end{cases}$, se pide: (Modelo 2010, 3 ptos)

a) (1 pto) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.
b)(1 pto) Resolverlo cuando tenga más de una solución
c) (1 pto) Resolverlo para λ =-2

GEOMETRÍA

Los elementos geométricos básicos son el punto, el vector, la recta y el plano.

Vector: $\overrightarrow{AB} = B - A$

La recta: Para calcular la ecuación de una recta necesitamos conocer un punto A(a_1, a_2, a_3) y un vector dirección $\vec{V}$ (v_1, v_2, v_3), o dos puntos por los que pase la recta, o dos planos cuya intersección sea la recta.

*Si nos dicen que r es paralela a s, esto significa que $\vec{V}_r = \vec{V}_s$

*Si nos dicen que r es perpendicular al plano π, esto significa que $\vec{V}_r = \vec{n}_\pi$

Ecuaciones de la recta:

**Ecuación vectorial:* (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + λ(v_1, v_2, v_3) ∀ λ ∈ R

**Ecuaciones paramétricas:* $\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases}$ $\forall \lambda \in R$

**Ecuación continua:* $\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2} = \dfrac{z - a_3}{v_3}$

**Ecuaciones reducidas:* $\begin{cases} x = pz + m \\ y = qz + n \end{cases}$, se obtienen de la ecuación continua igualando el primer término al tercero y el segundo al tercero. Desde estas ecuaciones podemos pasar a las ecuaciones paramétricas sin mas que hacer z = λ.

El plano: Para calcular la ecuación de un plano necesitamos conocer un punto A(a_1, a_2, a_3) y dos vectores dirección $\vec{V}$ (v_1, v_2, v_3), y $\vec{U}(u_1, u_2, u_3)$, o un punto A(a_1, a_2, a_3) y el vector normal $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, o dos puntos y un vector dirección, o tres puntos.

*Si nos dicen que π es perpendicular a r, esto significa que $\vec{n} = \overline{V}_r$.

*Si nos dicen que r está incluida en π y s es paralela a π, esto significa que $\vec{V}_r$ y $\vec{V}_s$ son vectores dirección de π.

*Si nos dicen que π es perpendicular a π ´ y π es paralelo a r, esto significa que $\vec{n}'$ y $\overrightarrow{V_r}$ son vectores dirección de π.

*Si nos dicen que π es perpendicular a π ´ y a π ´´, esto significa que $\vec{n}'$ y $\vec{n}''$ son vectores dirección de π.

Ecuaciones del plano:

*Ecuación vectorial: (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + λ(v_1, v_2, v_3) + μ(u_1, u_2, u_3) ∀ λ μ ∈ R

*Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 + \mu u_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 + \mu u_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 + \mu u_3 \end{cases}$ $\forall \lambda \mu \in R$

*Ecuación general: $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$ = Ax + By +Cz + D = 0. El vector $\vec{n}=(A,B,C)$ es el vector normal del plano π.

Condición de tres puntos alineados: Tres puntos, A, B, y C, están alineados si verifican que $\overrightarrow{AB}$ es proporcional a $\overrightarrow{AC}$

Condición de cuatro puntos coplanarios: Cuatro puntos, A, B, C y D son coplanarios si verifican que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes. Es decir si $\begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} \end{vmatrix} = 0$

Posición relativa de dos rectas: Sean las rectas $r \equiv \{P_r, \overrightarrow{V_r}\}$ y $s \equiv \{P_s, \overrightarrow{V_s}\}$. Se pueden plantear las siguientes situaciones:

*Si $\vec{V}_r$ es proporcional a $\vec{V}_s$, entonces $\begin{cases} \text{- Las rectas son paralelas si } P_r \text{ no verifica la ecuación de s} \\ \text{- Las rectas son coincidentes si } P_r \text{ si verifica la ecuación de s} \end{cases}$

*Si $\vec{V}_r$ no es proporcional a $\vec{V}_s$, entonces $\begin{cases} \text{– Las rectas se cortan si } \begin{vmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} \\ \overrightarrow{V_r} \\ \overrightarrow{V_s} \end{vmatrix} = 0 \\ \text{- Las rectas se cruzan si } \begin{vmatrix} \overrightarrow{P_rP_s} \\ \overrightarrow{V_r} \\ \overrightarrow{V_s} \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}$

Posición relativa de dos planos: Sean los planos π : Ax + By + Cz + D = 0 y π´: A´x + B´y + C´z + D´ = 0, pueden ocurrir los siguientes casos:

*Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$, los planos son coincidentes

*Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$, los planos son paralelos

*Si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$, los planos se cortan en una recta

Posición relativa de recta y plano: Sea la recta $r \equiv \{P_r, \overrightarrow{V_r}\}$ y el plano π : Ax + By + Cz + D = 0 pueden ocurrir los siguientes casos:

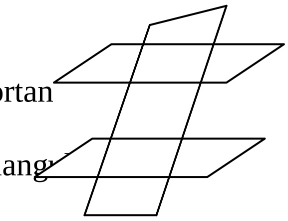
*Si $\overrightarrow{V_r}.\vec{n} = 0$ puden ocurrir dos cosas $\begin{cases} \text{- Si } P_r \text{ verifica la ecuación de } \pi \text{, la recta está contenida en el plano} \\ \text{- Si } P_r \text{ no verifica la ecuación de } \pi \text{, la recta es paralela al plano} \end{cases}$

*Si $\overrightarrow{V_r}.\vec{n} \neq 0$, la recta y el plano se cortan en un punto

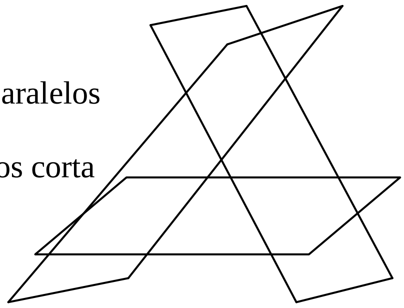
Posición relativa de tres planos: Sean los planos $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ $\pi' : A'x + B'y + C'z + D' = 0$ y $\pi'' : A''x + B''y + C''z + D'' = 0$, forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (en el que llamaremos A a la matriz de los coeficientes y A^* a la matriz ampliada). Se pueden presentar las siguientes situaciones:

*Si Rang(A) = Rang(A^*) = 3, tenemos un sistema compatible determinado con una única solución, por lo tanto son tres planos que se cortan en un punto

*Si Rang(A) = 2 y Rang(A^*) = 3, tenemos un sistema incompatible, por lo tanto son tres planos que no tienen nigún punto en común. Analizando los planos de dos en dos llegamos a las siguientes situaciones:

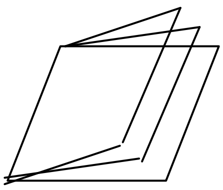


Dos planos paralelos y el tercero los corta

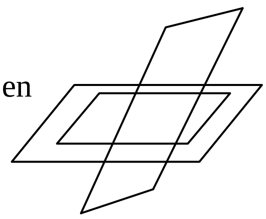


Tres planos que se cortan formando un prisma triang

*Si Rang(A) = Rang(A^*) = 2, tenemos un sistema compatible indeterminado, por lo tanto estos planos tienen en común infinitos puntos, exactamente tienen en común una recta. Analizando los planos de dos en dos llegamos a las siguientes situaciones:

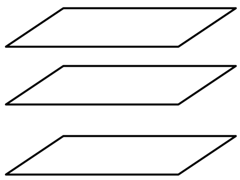


Tres planos que se cortan en una recta

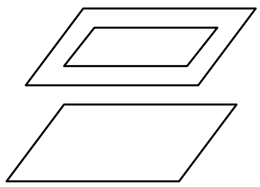


Dos planos coincidentes y tercero los corta

*Si Rang(A) = 1 y Rang(A^*) = 2, tenemos un sistema incompatible, por lo tanto son tres planos que no tienen ningún punto en común. Analizando los planos de dos en dos llegamos a las siguientes situaciones:



Tres planos paralelos



Dos planos coincidentes y el tercero paralelo

*Si Rang(A) = Rang(A^*) = 1, tenemos un sistema compatible indeterminado, por lo tanto estos planos tienen en común infinitos puntos, son tres planos coincidentes.

Producto escalar: El producto escalar de dos vectores es un número que se obtiene (en bases ortonormales) haciendo $\vec{U}.\vec{V} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ (ver propiedades)
El producto escalar de dos vectores perpendiculares vale 0.

Producto vectorial: El producto vectorial de dos vectores es un vector que tiene

*Dirección perpendicular a los vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$

*Sentido el que se obtiene al aplicar la regla del sacacorchos al llevar $\vec{U}$ sobre $\vec{V}$

*Módulo $\left|\vec{U}\times\vec{V}\right| = \left|\vec{U}\right|.\left|\vec{V}\right|.\operatorname{sen}\alpha$ siendo α el ángulo que forman los vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$.

Geométricamente es el área del paralelogramo que se forma con los vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$

En bases ortonormales las coordenadas del vector $\overrightarrow{U} \times \overrightarrow{V}$ se calculan del siguiente modo:

$$\overrightarrow{U} \times \overrightarrow{V} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \text{ (ver propiedades)}$$

Producto mixto: El producto mixto de tres vectores es un número que se obtiene (en bases ortonormales) haciendo: $\left[\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ (ver propiedades)

Geométricamente es el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}$ y $\overrightarrow{W}$.

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad:

Paralelismo
- Dos rectas son paralelas si sus vectores dirección son proporcionales
- Dos planos son paralelos si sus vectores normales son proporcionales
- Una recta es paralela a un plano si $\overrightarrow{V}_r$ es perpendicular a $\overrightarrow{n}$. Es decir si $\overrightarrow{V}_r.\overrightarrow{n} = 0$

Perpendicularidad
- Dos rectas son perpendiculares si lo son sus vectores dirección, es decir, si $\overrightarrow{V}_r.\overrightarrow{V}_s = 0$
- Dos planos son perpendiculares si lo son sus vectores normales, es decir, si $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}' = 0$, ó lo que es lo mismo, si el vector normal de uno es vector dirección del otro
- Una recta es perpendicular a un plano si $\overrightarrow{V}_r$ es proporcional a $\overrightarrow{n}$, es decir, si el vector dirección de la recta es el vector normal del plano

Punto de corte de dos rectas: Para calcular el punto de corte de dos rectas se escriben en paramétricas, se igualan y se resuelve el sistema que forman

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} a_1 + \lambda v_1 = b_1 + \mu u_1 \\ a_2 + \lambda v_2 = b_2 + \mu u_2 \\ a_3 + \lambda v_3 = b_3 + \mu u_3 \end{array} \right\} \equiv s$$

, una vez calculado λ o μ se sustituye en la recta correspondiente para calcular las coordenadas del punto.

Punto de corte de recta y plano: Se escribe la recta en paramétricas y se sustituyen x, y, z en la ecuación del plano. Se calcula el valor de λ y se sustituye en la ecuación de la recta para calcular las coordenadas del punto de corte.

Ecuaciones de una recta dada como intersección de dos planos: Si tenemos una recta dada como intersección de dos planos, para obtener de ella un punto y el vector normal tenemos dos posibilidades:

a)Pasarla a paramétricas llamando λ a una de las variables y resolviendo el sistema que queda.

b)Calcular un punto cualquiera haciendo x o y o z igual a cero y resolviendo el sistema que queda y calcular el vector dirección como producto vectorial de los vectores normales de los planos, $\overrightarrow{V}_r = \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{n}' = (A, B, C) \times (A', B', C')$

Distancias:

Entre dos puntos: d(A, B) = $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 - (b_3 - a_3)^2}$ u

De un punto a un plano: d(A, π) = $\dfrac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ u

De un punto a una recta: d(A, r) = $\dfrac{\left|\overrightarrow{Ap_r} \times \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$ u

De un plano a una recta: d(π, r) = $\begin{cases} -\text{Si se cortan, } d(\pi, r) = 0 \\ -\text{Si r contenida en } \pi,\ d(\pi, r) = 0 \\ -\text{Si r paralela a } \pi,\ d(\pi, r) = d(p_r, \pi) \end{cases}$

De un plano a un plano: d(π, π´) = $\begin{cases} -\text{Si se cortan, } d(\pi, \pi') = 0 \\ -\text{Si son coincidentes, } d(\pi, \pi') = 0 \\ -\text{Si son paralelos, } d(\pi, \pi') = d(A_\pi, \pi') \end{cases}$

De una recta a una recta: d(r, s) = $\begin{cases} -\text{Si se cortan o son coincidentes } d(r, s) = 0 \\ -\text{Si son paralelas } d(r, s) = d(p_r, s) = d(p_s, r) \\ -\text{Si se cruzan } d(r, s) = \dfrac{\left|\left\{\overrightarrow{p_r p_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}\right\}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|} \end{cases}$

Ángulos:

Ángulo que forman dos rectas: $\alpha = \text{Arc cos}\, \dfrac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \left|\overrightarrow{v_s}\right|}$

Ángulo que forman dos planos: $\alpha = \text{Arc cos}\, \dfrac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'}}{\left|\overrightarrow{n}\right| \left|\overrightarrow{n'}\right|}$

Ángulo que forman recta y plano: $\alpha = \text{Arc sen}\, \dfrac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \left|\overrightarrow{n}\right|}$

Área del triángulo: El área del triángulo formado por los puntos A, B, C es A = $\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$ u^2.

Volumen del tetraedro: El volumen del tetraedro formado por los puntos A, B, C, D es

$$V = \frac{1}{6}\left|\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right\}\right|$$

Problemas particulares:

Punto simétrico (A´):

**De un punto A respecto de un plano π:*

-Se hace la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por A.

-Se calculan las coordenadas del punto de corte de esta recta con el plano π (M). Este punto es el punto medio entre A y A´.

-Se calcula A´ despejando de la fórmula del punto medio A´= 2M – A.

**De un punto A respecto de una recta r:*

-Se hace la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por A

-Se calculan las coordenadas del punto de corte de este plano con la recta r (M). Este punto es el punto medio entre A y A´.

-Se calcula A´ despejando de la fórmula del punto medio A´= 2M – A.

Proyección ortogonal de una recta r sobre un planoπ:

-Se calcula un plano perpendicular al dado y que contenga a la recta r

-La recta r´es la intersección del plano que nos han dado y el que hemos calculado.

Calcular puntos de una recta r que cumplan determinadas condiciones:

-Se escribe la recta r en paramétricas y se escribe el punto P_r en forma paramétrica

-Se obliga a P_r a que cumpla las condiciones impuestas en el enunciado

Ecuación de una recta t que pasa por un punto A y corta a las rectas r y s:

Se estudia la posición relativa de las rectas r y s

a)Si r y s se cortan se calcula el punto de corte P. Con los puntos A y P se hace la ecuación de la recta t.

b)Si r y s se cruzan

-Como t corta a r $\Rightarrow$ son coplanarias. Calculamos un plano π con A y r

-Como t corta a s $\Rightarrow$ son coplanarias. Calculamos un plano π´ con A y s

-La recta t pedida es la intersección de los planos π y π´.

c)Si r y s son paralelas o coincidentes el problema tiene infinitas soluciones

Ecuación de la recta t perpendicular a las rectas r y s y que las corta:

-Como t es perpendicular a r y a s, se tiene que $\vec{v_t} = \vec{v_r} \times \vec{v_s}$

-Se estudia la posición relativa de las rectas r ys

a)Si r y s se cortan se calcula el punto de corte P. Con el punto P y el vector $\vec{v_t}$ se hace la ecuación de la recta t.

b)Si r y s se cruzan

-Como t corta a r $\Rightarrow$ son coplanarias. Calculamos un plano π con $\vec{v_t}$ y r

-Como t corta a s $\Rightarrow$ son coplanarias. Calculamos un plano π´ con $\vec{v_t}$ y s

-La recta t pedida es la intersección de los planos π y π´.

c)Si r y s son paralelas o coincidentes el problema tiene infinitas soluciones

EJERCICCIOS

Vectores y rectas

1.- Dados los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ tales que $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1$ y $|\vec{c}| = 4$ y $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0,$ calcular la siguiente suma de productos escalares: $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (Jun 1996 – 3 pts)

2.- Señalar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. En caso de ser ciertas justifíquense; en caso contrario póngase ejemplos que lo confirmen:

a) El producto mixto de tres vectores cualesquiera no nulos es siempre distinto de cero.

b) Si $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son tres vectores del espacio tridimensional R^3 no nulos que satisfacen la condición $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, entonces se verifica que $\vec{b} = \vec{c}$. (Jun 1996 – 2 ptos)

3.- Sea ABC un triángulo isósceles, cuyo ángulo desigual es A. Hallar el coseno del ángulo A sabiendo que las medianas trazadas desde los vértices B y C son recíprocamente perpendiculares. (Sugerencia: tomar ejes coordenados XOY haciendo que el eje OX coincida con BC y que el eje OY coincida con la altura desde el vértice A a BC). (Jun 1996 – 3 ptos)

4.- ¿Es siempre cierto que $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2 \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ (el "$\times$" representa al producto vectorial) ?. En caso afirmativo, justifíquese. En caso contrario, póngase un ejemplo que lo confirme. (Sep 1996 – 2 ptos)

5.- Señalar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas razonando las respuestas.

a) Si los puntos A, B, C y D pertenecen a un mismo plano, entonces los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente independientes. (Jun 1997 – 2 ptos)

b) Sean (A, $\vec{v}$) y (A´, $\vec{v}´$) las determinaciones lineales de dos rectas r y r´. Si los vectores $\overrightarrow{AA´}, \vec{v}$ y $\vec{v}´$ son linealmente dependientes, entonces las rectas r y r´ son coplanarias.

6.- Se consideran dos varillas AB y MN rígidamente unidas perpendicularmente en M, que es el punto medio de AB. Las longitudes de las varillas son $\overline{AB} = 2a$ y $\overline{MN} = a$. Se dibujan dos rectas perpendiculares en el suelo (plano) y se desplazan las varillas sobre él de modo que A recorra una de dichas rectas, B recorra la otra y el extremo N quede a distinto lado de AB que el punto donde se cortan las rectas. Hallar el lugar geométrico que describe el extremo N. (Jun 1997 – 3 ptos)

7.- De las propiedades de la dependencia lineal, decir cuál o cuáles son ciertas, justificando la respuesta:

a) Un conjunto de vectores con dos o más vectores iguales no es linealmente dependiente.

b) En R^3, si tres vectores son linealmente dependientes, entonces son coplanarios.

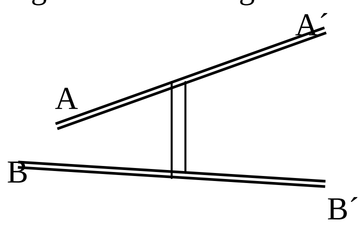
c) Si en un conjunto de vectores está el vector 0, entonces el conjunto es linealmente dependiente. (Jun 19997 – 2 ptos)

8.- Dos varillas fijas AA´ y BB´, de espesor despreciable, están entrelazadas por una goma elástica del modo que se indica en la figura. La goma que está tensa, puede deslizar libremente por las varillas. Se sabe que las varillas ocupan las posiciones (en ejes cartesianos rectangulares xyz):

$$AA´ \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{2} \qquad BB´ \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$$ (Sep 1997 – 3 ptos)

a) ¿Qué posiciones relativas tienen las rectas AA´ y BB´?.

b) Hallar la longitud total de la goma elástica en su posición de equilibrio.



9.- a) Comprobar que los vectores $\vec{a}$ = (1, 1, 3); $\vec{b}$ = (-1, 2, 0); y $\vec{c}$ = (1, 3, 5) son linealmente independientes. (1 pto)
b) Encontrar la ecuación del plano π determinado por el punto Q (-1, 0, 1) y los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ del apartado anterior. (1 pto) (Jun. 1998, 2 ptos)

10.- Encontrar los vectores unitarios de R^3 que son perpendiculares a $\vec{v}$ = (1, 0, 1) y que forman un ángulo de 60º con $\vec{w}$ = (1/2, $2^{1/2}$/2, 1/2). (Jun. 1998, 2 ptos)

11.- Dados los puntos A(1, -3, 1); B(2, 3, 1) y C(1, 3, -1), se pide:
a) Obtener la ecuación del plano π que los contiene. (1 pto)
b) Calcular la distancia del origen de coordenadas al plano π. (1 pto)
c) Determinar el volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, y C y el origen de coordenadas. (1 Pto) (Jun. 1999, 3 ptos)

12.- a) Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuación: 3x – 4y + 5 = 0; y 2x – 2y + z + 9 = 0. (1 pto)
b) ¿Qué puntos del eje OY equidistan de ambos planos?. (1 pto) (Jun. 1999, 2 ptos)

13.- Sean A, B y C los puntos de la rectas x – 12 = (y + 6)/2 = (z – 6)/3 que están en los planos coordenados x = 0, y = 0, z = 0, respectivamente.
a) Determinar razonadamente cuál de los tres puntos se encuentra entre los otros dos. (1 pto)
b) Siendo D un punto exterior a la recta, indicar, razonadamente, cuál de los triángulos DAB, DAC o DBC tiene mayor área. (1 pto) (Jun. 1999, 2 ptos)

14.- Sean la recta r y el plano π dados por las ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad \text{y } \pi \equiv 2x - 3y + z + 1 = 0$$

a) Calcular el seno del ángulo que forman la recta y el plano. (1 pto)
b) Calcular la ecuación de la recta proyección ortogonal de r sobre π. (2 ptos) (Sep 1999)

15.- Resolver la siguiente ecuación vectorial $\vec{x} \wedge (2,1,-1) = (1,3,5)$, sabiendo que $|\vec{x}| = \sqrt{6}$, donde el símbolo $\wedge$ significa producto vectorial. (Jun 2000 – 2 ptos)

16.- Sean los puntos P(8, 13, 8) y Q(-4, -11, -8). Se considera el plano π perpendicular al segmento PQ por su punto medio.
a) Obtener la ecuación del plano π. (1 pto)
b) Calcular la proyección ortogonal del punto O(0, 0, 0) sobre el plano π. (1 pto)

c) Hallar el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes coordenados y el origen de coordenadas. (1 pto) (Jun 2000 3 ptos)

17.- Se consideran los puntos A(1, λ, 0); B(1, 1, λ -2) y C(1, -1, λ).

a) Comprobar que no están alineados cualquiera que sea el valor de λ. (1 pto)
b) Hallar el área del triángulo que determinan los tres puntos. (1 pto) (Sep. 2000, 2 ptos)

18.- Sean la recta r $\equiv \dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{2}$, y el plano $\pi \equiv 2x - y + kz = 0$.

a) Calcular m y k para que la recta sea perpendicular al plano. (1 pto)
b) Calcular m y k para que la recta esté contenida en el plano. (1 pto)(Sep. 2000, 2 ptos)

19.- Dados el plano $\pi \equiv$ x + y + z = 1, la recta r $\equiv$ (x, y, z) = (1, 0, 0) + λ(0,1,1), y el punto P(1, 1, 0), se pide:

a) Hallar la ecuación de una recta s que sea perpendicular a r y que pase por P. (1 pto)
b) Hallar el punto P´ simétrico de P respecto de r. (1 pto)
c) Hallar el punto P´´ simétrico de P respecto de π. (1 pto) (Jun. 2000, 3 ptos)

20.- Sean las rectas: $r \equiv x - 2 = \dfrac{y-1}{k} = \dfrac{z+1}{-2}$ $\quad$ $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

a) Hallar k para que r y s sean coplanarias. (1 pto)
b) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas. (1 pto)
c) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas. (1pto) (Jun. 2001, 3 ptos)

21.- Los vértices de un triángulo son A(-2, -1); B(7, 5) y C(x, y).

a) Calcular el área del triángulo que forman en función de x e y. (1 pto)
b) Encontrar el lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que el área anterior es 36 u^2. (1 pto)

22.- Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación $\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA}$

a) Calcular el valor que toma k en la expresión $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ (1 punto)
b) Si A(1, 2, -1) y B(3, 6, 9), hallar las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida. (1 punto) (Sep 2001)

23.- Se considera el tetraedro cuyos vértices son A(1, 0, 0), B(1, 1, 1), C(-2, 1, 0) y D(0, 1, 3).

a) Hallar el área del triángulo ABC y el volumen del tetraedro ABCD. (1 pto)
b) Calcular la distancia de D al plano determinado por A, B y C. (1 pto)
c) Hallar la distancia entre las rectas AC y BD. (1 pto) (Sep 2001)

24.- Sean las rectas: r $\equiv \begin{cases} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $\quad$ s $\equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{a} = z$

a) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a. (1 pto)
b) Calcular la distancia entre r y s cuando a = -2. (1 pto)

25.- Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

x = 1 +t ; y = -1 + 2t ; z = t

y es perpendicular al plano π: 2x + y – z = 2. (2ptos) (junio 2002)

26.- Los puntos A(1, 1, 1); B(2, 2, 2); C(1, 3, 3) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

a) (1 pto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y el área del paralelogramo
b) (1 pto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos. (Junio 2002)

27.- Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2}\,\frac{z-3}{2} \quad ; \qquad s \equiv \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{-1}$$

a) (1 pto) Calcular la distancia de r a s.
b) (1 pto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s, que corta a ambas.
c) (1 pto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s, que pasa por el punto P(1, 0, 0). (Sep 2003)

28.- Para cada valor del parámetro real a, se consideran los tres planos siguientes:

$\alpha \equiv x + y + az = -2$; $\beta \equiv x + a\,y + z = -1$; $\pi \equiv ax + y + z = 3$

a) (1,5 ptos) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.
b) (0,5 ptos) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común. (Sep 2002)

29.- Se consideran el plano π y la recta r siguientes:

$\pi \equiv x + y - 2z = 6$ $\qquad r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$; se pide:

a) (1,5 ptos) Hallar el punto simétrico de M(1, 1, 1) respecto del plano π.
b) (1,5 ptos) Hallar el punto simétrico de M(1, 1, 1) respecto de la recta r. (Modelo2003)

30.- Dados los puntos A(1, 1, 1) ; B(0, -2, 2) ; C(-1, 0, 2) ; D(2, -1, -2), se pide:

a) (1 pto) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, D.
b) (1 pto) Calcular la distancia del punto D al plano determinado por los puntos A, B y C.
c) (1 pto) Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por A, B y C. (Modelo 2003)

31.- Dados los puntos A(1, 0, 1) y B(0, 2, 0), y el plano $\pi \equiv .x - 2y - z - 7 = 0$, determinar la ecuación del plano que es perpendicular al plano π y que pasa por los puntos A y B.
(2 ptos) (Sep 2003)

32.-Dadas las rectas: $r \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-k}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + z = 1 \end{cases}$

a) (1pto) Hallar el valor de k para que las rectas estén contenidas en el mismo plano.
b) (1 pto) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene. (Sep 2003)

33.- Dado el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$, y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{2}$, se pide:

a) (1 pto) Calcular el punto Q en el que se cortan recta y plano (Sep 2003)
b) (2 ptos) Encontrar un plano π´, paralelo a π, tal que el punto Q´en el que se cortan el plano π´ y la recta r esté a 2 unidades de distancia del punto Q hallado en el apartado anterior.

34.- Dado el plano $\pi \equiv x + y + az + 1 = 0$ y las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$, $r' \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$, $r'' \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$

a) (1,5 ptos) Calcular el valor de a para que los puntos de corte del plano π con las rectas r, r´, r´´ estén alineados.
b) (0,75 ptos) Calcula las ecuaciones de las rectas que pasan por esos tres puntos.
c) (0,75 ptos) Calcula la distancia de dicha recta al origen. (Modelo 2004)

35.-Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$, y $s \equiv \begin{cases} 2x - z + 2 = 0 \\ 2y - mz = 6 \end{cases}$

a) (1 pto) Hallar el valor de m para que r y s sean paralelas.
b) (1 pto) Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene a r y a s. (Modelo 2004)

36.- Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P(3, -1, 0) y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$. (2 ptos) (Modelo 2004)

37.- Se considera la recta y los planos siguientes: $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$; $\pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0$;

$\pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0$ y se pide:

a) (1pto) Determinar la posición relativa de la recta respecto de cada uno de los planos.
b) (1 pto) Determinar la posición relativa de los dos planos.
c) (1 pto) Calcular la distancia de r a π_2 (Junio 2004)

38.- a) (2 ptos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k:

$\pi_1 \equiv 2x + 3y + kz = 3$
$\pi_2 \equiv x + ky - z = -1$ (Junio 2004)
$\pi_3 \equiv 3x + y - 3z = -k$

b) (1 pto) En los casos en los que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector dirección de dicha recta.

39.- Sea el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$.

a) (1 pto) Hallar el punto simétrico del (0, 0, 0) respecto de π.
b) (1 pto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene al eje OZ.
c) (1 pto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes coordenados. (Sept. 2004)

40.- a) (1,5 ptos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano z = 0 que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.

b) (0,5 ptos) Describe dicho conjunto. (Sept. 2004)

41.- El plano $\pi \equiv 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

a) (0,5 ptos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.

b) (0,5 ptos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.
c) (1 pto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π. (Sept. 2004)

42.- Dados los puntos A(-1, 1, 1), B(1, -3, -1) y C(1, 0, 3), hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta r $\equiv x-1=\dfrac{y-1}{-1}=z-1$ de manera que el tetraedro ABCD tenga de volumen 2 u^3. (Mod 2005) (3 ptos)

43.- Se considera la recta $r\equiv\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-5}{2}$, y la familia de rectas dependientes del parámetro m $s\equiv\begin{cases}3x-y=8-12m\\ y-3z=7-3m\end{cases}$ (Mod 2005)

a) (2 ptos) Determinar el valor de m para el que las dos rectas r y s se cortan
b) (1 pto) Para el caso m = 0, hallar la distancia entre las rectas r y s

44.- Dadas las rectas: r $\equiv\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{2}$; y s$\equiv\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$ (Modelo 2005)

a) (1 pto) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.
b) (1 pto) Hallar los puntos de intersección de t con r y s
c) (1 pto) Calcular la mínima distancia entre r y s.

45.- Dado el punto P(1, 3, -1), se pide: (Junio 2005)

a) (1 pto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos X(x, y, z) cuya distancia a P sea igual a 3
b) (2 ptos). Calcular los puntos de la recta: $r\equiv\begin{cases}x=3\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1-4\lambda\end{cases}$, λ € R, cuya distancia a P es igual a 3

46.- Dadas las rectas $r\equiv\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$ y $s\equiv\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{2}$ (Junio 2005)

a)(1,5 ptos) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.
b) (1,5 ptos) Calcular la mínima distancia entre r y s

47.- (2 ptos) Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos:

π_1: $x + z = \lambda$
π_2: $4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2$ (Sep 2005)
π_3: $2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda$

48.- Se consideran las rectas $r:\begin{cases}x-y=3\\ x+y-z=0\end{cases}$ y $s:\begin{cases}x-z=4\\ 2x-y=7\end{cases}$ (Sep 2005)

a) (1pto) Hallar la recta t perpendicular a r y a s que pasa por el origen
b) (1 pto) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado a).

49.- Se considera la familia de planos mx + (m – 2)y + 3(m + 1)z + (m + 1) = 0 siendo m un parámetro real. Se pide: (Sep 2005)

a) (1 pto) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.
b) (1 pto) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto (1, 1, 0)
c) (1 pto) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta r: $\begin{cases} x-2z+1=0 \\ -y+z+1=0 \end{cases}$

50.- (2 ptos) Un punto de luz situado en P(0,1,1) proyecta la sombra de la recta x = y = -z sobre el plano π: x - z = 0. Calcular las coordenadas del punto de esa proyección que pertenece al plano z = 1. (Modelo 2006)

51.- (2 ptos) Se consideran las rectas: $r: x = y-6 = \frac{z-5}{2}$; $s: \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -4+3\lambda \\ z = 0 \end{cases}$. Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto P(2, -1, 1) y cuyo vector dirección es perpendicular a los vectores dirección de las rectas anteriores. (Modelo 2006)

52.- (3 ptos) Dadas las rectas: $r: \frac{x+1}{3} = y+2 = z+3$; $s: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$.
a) (1,5 ptos) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s
b) (1,5 ptos) Calcular la distancia de s al plano anterior. (Modelo 2006)

53.- Sean las rectas: $r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4}$, $s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$ (Junio 2006)
a) (1,5 ptos) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.
b) (1,5 ptos) Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s.

54.- Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene como vector dirección a $\vec{v} = (4,3,1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi \equiv z = 0$, el triángulo OPQ tenga de área 1 u^2.(Junio 2006, 2 ptos)

55.- Determinar la posición relativa de las rectas $r \equiv \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1}$, $s \equiv \begin{cases} x+2y-5z-5=0 \\ 2x+y+2z-4=0 \end{cases}$
(Junio 2006, 2 ptos)

56.- Se consideran los puntos A(0, 1, 0) y B(1, 0, 1), se pide: (Septiembre 2006)
a) (1 pto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos X(x, y, z) que equidistan de A y B.
b) (0,5 ptos) Determinar la ecuación que verifican los puntos X(x, y, z) cuya distancia a A es la misma que la distancia de A a B.
c) (1,5 ptos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos C(x, y, z) del plano x + y + z = 3, tales que el triángulo ABC es rectángulo con ángulo recto en el vértice A.

57.- Un plano π corta a los ejes coordenados en los puntos A(1, 0, 0), B(0, λ, 0) y C(0, 0, 4). Se pide:
a) (1,5 ptos) Hallar el valor λ > 0 de manera que el volumen del tetraedro OABC, (donde O es el origen) sea 2 u^3.
b) (1,5 ptos) Para el valor de λ obtenido en el apartado a, calcular la longitud de la altura del tetraedro OABC correspondiente al vértice O. (Septiembre 2006)

58.- Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ y el punto P(1, 1, 1). Dado el punto Q(0, 0, 0) de r, hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A, P y Q tenga área 1 u^2. (Modelo 2007, 2 ptos)

59.- a) (1,5 ptos) Calcular la ecuación general del plano π_1 que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y es perpendicular al plano π_2: 2x + y – z = 2. (Modelo 2007)

b) (0,5 ptos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

60.- Se consideran el punto P(1, 0, 1) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ y el plano π: x + y + z = 0, se pide:

a) (1,5 ptos) Obtener el punto P´, simétrico de P respecto del plano π.

b) (1,5 ptos) Determinar la ecuación de la recta s que contiene al punto P, corta a la recta r y es paralela al plano π. (Modelo 2007)

61.- Dados el punto A(1, -2, -3), la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el plano π: x - 2y - 3z + 1 = 0, se pide:

a) (1,5 ptos) La ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

b) (1, 5 ptos) Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π. (Junio 2007)

62.- Sean los puntos A(λ, 2, λ), B(2, -λ, 0), C(λ, 0, λ+2).

a) (1 pto) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C están alineados?

b) (1 pto) Comprobar que si A, B y C no están alineados, el triángulo que forman es isósceles.

c) (1 pto) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para λ = 0 y hallar la distancia de este plano al origen de coordenadas. (Junio 2007)

63.- Hallar los puntos de la recta $r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{-1}$, cuya distancia al plano π: 2x – y + 2z + 1 = 0 es igual a 1u. (Sep 2007, 2 ptos)

64.- Se consideran las rectas: $r \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, y $s \equiv \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$. Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto P(2, -1, 2) y cuyo vector dirección es perpendicular a los vectores directores de las rectas anteriores. (Sep 2007, 2 ptos)

65.- Sean las rectas: $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$, y $s \equiv \begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ x - 3z - 8 = 0 \end{cases}$. (Sep 2007)

a) (1,5 ptos) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1,5 ptos) Calcular la distancia entre el plano π y la recta s.

66.- Sean los puntos A(1, 0, 2) y B(1, 1, -4) (Modelo 2008)

a) (1 pto) Determinar las coordenadas de los puntos P y Q que dividen el segmento AB en tres partes iguales.
b) (1 pto) Si P es el punto del apartado anterior más próximo a A, determinar la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB.
c) (1 pto) Determinar la posición relativa del plano π y la recta $r \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$

67.- Hallar los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$, cuya distancia al plano π: 3x + 4y = 4, es igual a 1/3u. (Modelo 2008, 2 ptos)

68.- Dados los puntos A(1, 3, -2), B(2, 2k+1, k) y C(k+1, 4, 3), se pide: (Modelo 2008)
a) (1 pto) Determinar para qué valor de k el triángulo ABC es rectángulo en el vértice A.
b) (1 pto) Para k = 0 hallar el área del triángulo ABC.

69.- Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{cases}$, y $s \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$, se pide: (Junio 2008)
a) (1,5 ptos) Discutir la posición relativa de estas rectas según los diferentes valores de a.
b) (1,5 ptos) Si a = 1 calcular la distancia mínima entre las rectas r ys.

70.- Dados los puntos A(0, 0, 1), B(1, 0, -1), C(0, 1, -2) y D(1, 2, 0), se pide:
a) (0,5 ptos) Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios. (Jun 2008)
b) (1 pto) Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B, C.
c) (0,5 ptos) Hallar la distancia del punto D al plano π.

71.- Dados el plano π: 3x + 2y – z + 10 = 0 y el punto P(1, 2, 3), se pide:
a) (0,5 ptos) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular a π que pasa por el punto P.
b) (0,5 ptos) Hallar el punto Q intersección de π y r. (Jun 2008)
c) (0,5 ptos) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.
d) (0,5 ptos) Hallar el área del triángulo PQR.

72.- Dados los puntos P(1, 1, 3), Q(0, 1, 0), se pide: (Sep 2008)
a) (1 pto) Hallar todos los puntos R tales que la distancia de P a R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.
b) (1 pto) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q, que verifican que d(P, S) = 2d(Q, S).

73.- Dadas las rectas: $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$, y $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$, hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas. (Sep. 2008, 2 ptos)

74.- Dados el plano π ≡ x + y + z = 1 y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$, se pide:
a) (1 pto) Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π.
b) (2 ptos) Hallar un plano α, paralelo a π y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos α y π, tenga longitud $\sqrt{29}$ u. (Sep 2008)

75.- Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4}$ y el punto P(-2, 3, 2), perteneciente al plano π, se pide:

a) (0,5 ptos) Determinar la posición relativa de π y r.

b) (1 pto) Calcular la ecuación de la recta t contenida en π, que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a r.

c) (1,5 ptos) Sea Q el punto de intersección de r y t. Si s es la recta perpendicular al plano π y que contiene a P, y R es un punto cualquiera de s, probar que la recta determinada por R y Q es perpendicular a r. (Modelo 2009)

76.- Dados el punto P(1, -1, 2) y el plano π: $2x – y + z – 11 = 0$, se pide:

a) (1,5 ptos) Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P. Hallar el punto R simétrico de P respecto del plano π.

b) (1,5 ptos) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ u del punto P en el sentido del vector $\overrightarrow{PQ}$. (Modelo 2009)

77.- Dado el plano $\pi \equiv x + 3y + z = 4$, se pide: (Junio 2009)

a) (1 pto) Calcular el punto simétrico P del punto O(0, 0, 0) respecto del plano π

b) (1 pto) Calcular el coseno del ángulo que forman el plano π y el plano x = 0.

c) (1 pto) Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π, y los planos x=0, y=0, z=0.

78.- Dadas las rectas: $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$; $s \equiv \frac{x+2}{2} = y = z-2$, se pide:

a) (1 pto) Halar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) (1 pto) Determinar la distancia entre las rectas r y s

c) (1 pto) Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por el origen de coordenadas, corta a la recta s. (Junio 2009)

79.- Dadas las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}$; $s \equiv \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$, determinar los valores de los parámetros a, b para los cuales las rectas r, se cortan perpendicularmente. (Sep. 2009)

80.- Dado el plano π: $2x - y + 2z + 1 = 0$, hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π. (Sep. 2009)

81.- Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ y el plano π: $x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta simétrica de la recta r respecto del plano π. (Sep. 2009, 3 ptos)

82.- Dadas las rectas: $r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$; $s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$, se pide:

a) (1,5 ptos) Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s, y que contiene al origen de coordenadas.

b) (1,5 ptos) Determinar la mínima distancia entre r y s. (Modelo 2010)

83.- (2 ptos) Dados los puntos A(2,2,3) y B(0,-2, 1), hallar el punto o los puntos de la recta $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$ que equidistan de A y B. (Modelo 2010)

84.- (2 ptos) Dados el plano π: 5x - 4y + z = 0 y la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ contenida en π, obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r, y que pasa por el origen de coordenadas. (Modelo 2010)

CIRCUNFERENCIA Y ESFERA

1.- En una circunferencia se trazan dos cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, perpendiculares entre si que se cortan en un punto O; se sabe que $\overline{OB} = 8\,cm, \overline{OA} = 4\,cm,$ y $\overline{OC} = 2\,cm$. Obtener la ecuación de la circunferencia en los ejes, que, a su juicio resulte más fácil de obtener.

2.- a) Determinar el centro y el radio de la circunferencia C = $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$. (1 pto)
b) Obtener la ecuación de la recta tangente a C en el punto P(4, 0). (1 pto)
c) Encontrar la ecuación de la circunferencia concéntrica con C que es tangente a la recta de ecuación $2x - y + 2 = 0$. (1 pto)

3.- Los puntos A(0, 0, 4) y A´(2,4,0) son los extremos del diámetro de una esfera.
a) Calcular las coordenadas del centro y radio de la esfera. (1 pto)
b) Obtener su ecuación cartesiana. (1 pto)
c) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en el punto P(2, 4, 4). (1 pto)

4.-a) Determinar el centro y el radio de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 8z - 4 = 0$ (1 pto)
b) Determinar el centro y el radio de la circunferencia intersección de la esfera anterior con el plano $z = 0$. (1 pto)

5.- Sea la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 9 = 0$.
a) Determinar su centro y su radio. (0,5 ptos)
b) Hallar la ecuación de la recta que contiene el diámetro paralelo al eje OY. (0,5 ptos)
c) Obtener el centro y el radio de la circunferencia que resulta al cortar dicha esfera con el plano $z = 0$. (1 pto)
d) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en su punto del eje OX. (1 pto)

6.- Sean A(1,1) y B(-1, 1) dos puntos del plano.
a) Determinar las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por los puntos A y B, razonando donde están situados sus centros. (1 pto)
b) De entre las circunferencias del apartado anterior hallar el centro y el radio de la que es tangente a la recta $y = x$. (1 pto)

7.- Determinar la ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos (0, 0) y (1, 1) es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcular el área que encierra. (2 puntos)

8.- Se considera la varilla AB de longitud 1. El extremo A de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$, la varilla se mantiene en todo momento tangente a la circunferencia.
a) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo B de la varilla. (1 pto)
b) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico. (1 pto)

9.- Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$
a) Hallar su centro y radio y dibujarla. (1 pto)
b) Hallar el punto de la curva, de abcisa 0, mas alejado del origen;: hallar también la recta tangente a la curva en ese punto. (1 pto)
c) Hallar las ecuaciones de las tangentes, trazadas desde el punto P(3, 0) razonando la respuesta. (1 pto)

CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

Definición 1:

Se dice que la función f(x) es continua en x = a sí se verifica:

a) La función está definida en x = a, es decir, $\exists$ f(a).
b) Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Para ello es necesario que $\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y ambos sean iguales.
c) El valor del límite coincide con el valor de la función en el punto, es decir, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Por lo tanto, el valor de una función en un punto debe ser el que le asigna el límite en ese punto. De no ser así se dice que la función f(x) es discontinua en el punto x = a.

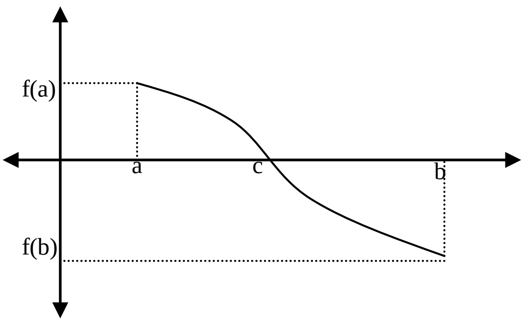
Una función f(x) es continua en el intervalo [a, b] cuando lo es en todos los puntos del intervalo.

Propiedades de las funciones continuas:

Propiedad 1: La suma, resta y producto de funciones continuas es una función continua. El cociente de dos funciones continuas es una función continua excepto para los valores de x que anulan la función del denominador.

Propiedad 2: Toda función continua en un intervalo cerrado admite un máximo absoluto y un mínimo absoluto. Es decir, si f(x) es continua en [a, b] existen sendos números c y d del intervalo para los cuales se cumple que $f(c) \le f(x) \le f(d)$, para todo $x \in [a, b]$.

Propiedad 3 (Teorema de Bolzano): Si f(x) es continua en $[a, b] \subset R$ y signo f(a) $\neq$ signo f(b), entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que f(c) = 0. (f(x) tiene alguna raíz en el intervalo (a, b)). Geométricamente, este teorema nos afirma que la única forma continua que tiene una función para pasar de tomar valores positivos a tomar valores negativos (o viceversa), es cortando al eje OX en algún punto.



Clasificación de las discontinuidades:

Discontinuidad evitable en x = a: Esta discontinuidad se tiene cuando $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, pero no existe f(a). Geométricamente corresponde a una gráfica que tiene un agujero en x = a. Para hacer que la función sea continua en este punto basta con definir $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Discontinuidad de 1ª especie en x = a: Esta discontinuidad se tiene cuando $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\exists f(a)$, Pero toman valores distintos. Gráficamente corresponde a una gráfica donde el punto (a, f(a)) está fuera de su lugar.

Discontinuidad de 2ª especie con salto finito en x = a: Esta discontinuidad se tiene cuando existen los límites laterales en x= a pero toman valores distintos. Geométricamente corresponde a una gráfica que en el punto (a, f(a)) está rota y presenta una especie de escalón.

Discontinuidad de 2ª especie con salto infinito en x = a: Esta discontinuidad se tiene cuando alguno de los límites laterales en x = a tiende a ∞ ó a -∞. Geométricamente la función tiene una asíntota vertical en ese punto.

Definición 2:

Se dice que la función f(x) es derivable en x = a si:

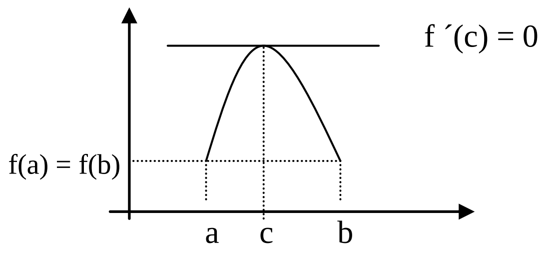
a) Es continua en x = a.
b) Existe f ´(a), es decir, existe $f_+´(a)$ y existe $f_-´(a)$ y son iguales

Aparte de los problemas de continuidad las funciones valor absoluto tienen problemas de derivabilidad en los valores de x que anulan el interior del valor absoluto.

Propiedades de las funciones derivables:

Propiedad 1 (Teorema de Rolle): Sea f(x) una función continua en [a, b], derivable en (a, b) y tal que f(a) = f(b). Entonces existe al menos un punto c perteneciente a (a, b) tal que f ´(c) = 0.

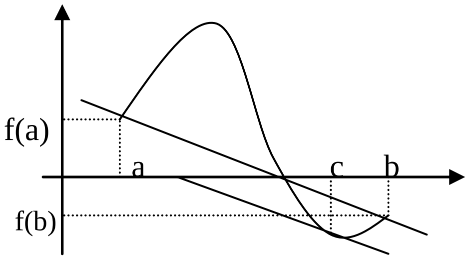
Geométricamente este teorema nos dice que la única forma continua y derivable que tiene una función de pasar de f(a) = h a f(b) = h es, o mediante una recta horizontal que tendría pendiente cero en todos los puntos del intervalo o teniendo algún máximo o mínimo en el intervalo (un punto donde la derivada se anula)



Propiedad 2 (Teorema de Cauchy): Sean f(x) y g(x) dos funciones continuas en el intervalo [a, b], derivables en (a, b), tales que sus derivadas no se anulan simultáneamente en ningún punto del intervalo (a, b) y siendo g(a) ≠ g(b). Entonces existe al menos un punto c perteneciente al intervalo (a, b) en el cual se verifica que $\frac{f´(x)}{g´(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

Propiedad 3 (Teorema del valor medio o de Lagrange): Sea f(x) una función continua en [a, b] y derivable en (a, b). Entonces existe al menos un punto c perteneciente al intervalo (a, b) en el cual se verifica que $f´(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Geométricamente este teorema nos proporciona una forma de calcular un punto en el intervalo (a, b), en el cual la pendiente de la recta tangente a la función (f ´(c)), es la misma que la pendiente de la recta secante a la función en los extremos del intervalo ($\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$). Por lo tanto la recta tangente a la función en el punto x = c es paralela a la recta secante a la función en los extremos del intervalo.



Propiedad 4 (reglas de L´ Hôpital): Para indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ se pueden aplicar las siguientes reglas:

a) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Los límites correspondientes a las restantes indeterminaciones, ($\infty - \infty$, $0.\infty$, 1^{∞} ∞^{0}, 0^{0}), se reducen mediante diversos procedimientos a las indeterminaciones $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, pudiéndose resolver entonces utilizando las reglas de L ´Hôpital.

Se aconseja que en indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, cuando sea posible, se utilice el método de comparación.

LA DERIVADA

1.- Tasa de variación media

Responde a la pregunta ¿cuántas unidades crece la variable y por cada una que crece la variable x?.

$$t_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ejemplo: La ecuación del espacio recorrido por un móvil en función del tiempo, medido en metros es, $S(t) = 3t^2 - t + 1$. Hallar la velocidad media entre t = 2 y t = 6 segundos.

Como la velocidad es la variación del espacio respecto del tiempo, se tiene:

$$t_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{S(6) - S(2)}{6 - 2} = \frac{103 - 11}{4} = \mathbf{23\,m}$$

2.- Tasa de variación instantánea

Es el límite de la tasa de variación media, cuando los intervalos donde se mueve la variable independiente se hacen cada vez más pequeños. Estudia como varía la función en un punto. Si la función varía positivamente es que por ese punto pasa creciendo, y si la función varía negativamente es que por ese punto la función pasa decreciendo.

$$t_i = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ejemplo: La ecuación del espacio recorrido por un móvil en función del tiempo es, $S(t) = 3t^2 - t + 1$. Hallar la velocidad del móvil en el instante t = 2.

$$t_i = \lim_{h \to 0} \frac{S(2+h) - S(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (5 + 3h) = \mathbf{5}$$

1) S(2 + h) = 3(2 + h)2 – (2 + h) + 1 = 11 + 5h + 3h2
2) S(2) = 3.4 – 2 + 1 = 11
3) S(2 + h) – S(2) = 5h + 3h2
4) $\frac{S(2+h) - S(2)}{h} = \frac{5h + 3h^2}{h} = 5 + 3h$

3.- Derivada de una función en un punto

La derivada de una función en un punto x = a es:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Coincide con la tasa de variación instantánea de la función en el punto a.

Ejemplo: Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ en el punto $x_o = -1$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2(-1+h)}{(-1+h)+3} - \frac{-2}{-1+3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h(h+2)} = \lim_{h\to 0} \frac{3}{h+2} = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

4.- Función derivada

Se llama función derivada de la función f(x) y se escribe f ´(x) a la función:

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la función $f(x) = \frac{2x}{x+3}$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2(x+h)}{(x+h)+3} - \frac{2x}{x+3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h}{(x+h+3)(x+3)h} = \lim_{h \to 0} \frac{6}{(x+h+3)(x+3)} =$$

$$\frac{6}{(x+3)^2}$$

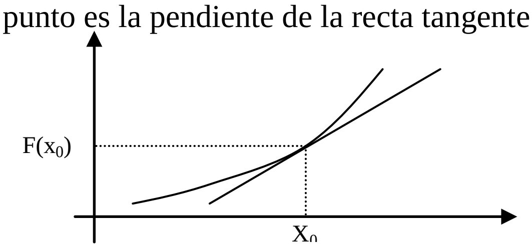
5.- Dominio de derivabilidad

Es el conjunto de valores de la variable x para los cuales existe f ´(x). Para que una función sea derivable en un punto es necesario que sea continua ese punto y que las derivadas laterales en el punto valgan lo mismo.
Existen problemas de derivabilidad en:

a) Los puntos x = a donde f(x) es discontinua
b) Los puntos x = a donde se anula el interior de un valor absoluto, porque en ellos $f'_+(a) \neq f'_-(a)$.
c) Algunos puntos x = a donde cambia de definición una función a trozos, porque en ellos puede ocurrir que $f'_+(a) \neq f'_-(a)$.

6.- Interpretación geométrica de la derivada

Geométricamente la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.
Pendiente de la recta tangente = m_t = f ´(x_0)
La ecuación de la recta tangente es:
y – f(x_0) = f ´(x_0)(x – x_0)



Ejemplo:
1.- Calcular la ecuación de la recta tangente a la función f(x) = $3x^3 - 2x + 1$ en el punto $x_0 = 2$.
Necesitamos f(2) y f ´(2) = m_t, f(2) = 3.8 – 2.2 + 1 = 21; f ´(x) = $9x^2 - 2$;
f ´(2) = 9.4 – 2 = 34
r_t : y – 21 = 34(x – 2); **34x – y – 47 = 0**

2.- En qué punto de la gráfica de la función f(x) = $x^2 - 6x + 8$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante, (y = x). (Rectas paralelas significa que tienen la misma pendiente).
La pendiente de la bisectriz y = x es m = 1, por lo tanto $m_t = 1$
Como m_t = f ´(x_0), esto significa que f ´(x_0) = 1, de donde $2x_0 - 6 = 1 \Rightarrow x_0 = 7/2$
Para calcular la segunda coordenada del punto sólo tenemos que sustituir este valor en la función, $y_0 = f(x_0) = f(7/2) = (7/2)^2 - 6(7/2) + 8 = -3/4$
El punto de tangencia es el punto **P(7/2, -3/2)**

7.- Reglas de derivación para las operaciones de funciones

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))).g'(h(x)).h'(x) \quad \text{(regla de la cadena)}$$

8.- Tabla de derivadas

$f(x) = a$	$f'(x) = 0$ (a = constante)		
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$ (n = nº)	$f(x) = u^n$	$f'(x) = un^{n-1}.u'$ (u = f(x))
$f(x) = Ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = Ln(u)$	$f'(x) = \frac{1}{u}.u'$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}.\log_a e$	$f(x) = \log_a(u)$	$f'(x) = \frac{1}{u}.\log_a e.u'$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x.Lna$	$f(x) = a^u$	$f'(x) = a^u.Lna.u'$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^u$	$f'(x) = e^u.u'$
$f(x) = sen(x)$	$f'(x) = cos(x)$	$f(x) = sen(u)$	$f'(x) = u'.cos(u)$
$f(x) = cos(x)$	$f'(x) = -sen(x)$	$f(x) = cos(u)$	$f'(x) = -u'.sen(u)$
$f(x) = tang(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = sec^2(x) = (1 + tg^2(x))$		
$f(x) = tang(u)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(u)}.u' = u'.sec^2(u) = u'.(1 + tg^2(u))$		
$f(x) = cotg(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{sen^2(x)} = -cosec^2(x) = -(1 + cotg^2(x))$		
$f(x) = cotg(u)$	$f'(x) = \frac{-1}{sen^2(u)}.u' = -u'.cosec^2(u) = -u'.(1 + cotg^2(u))$		
$f(x) = sec(x)$	$f'(x) = tg(x).sec(x)$	$f(x) = sec(u)$	$f'(x) = u'.tg(u).sec(u)$
$f(x) = cosec(x)$		$f'(x) = -cotg(x).cosec(x)$	
$f(x) = cosec(u)$		$f'(x) = -u'cotg(u).cosec(u)$	
$f(x) = arc\ sen(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = arc\ sen(u)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$
$f(x) = arc\ tg(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = arc\ tg(u)$	$f'(x) = \frac{1}{1+u^2}.u'$
$f(x) = arc\ cotg(x)$	$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$	$f(x) = arc\ cotg(u)$	$f'(x) = \frac{-1}{1+u^2}.u'$

9.- Método de derivación logarítmica

Se utiliza, normalmente, para derivar función elevada a función ($y = u^v$). Se siguen los siguientes pasos:

1º) Se toman logaritmos neperianos en ambos lados de la igualdad y se aplican las propiedades de los logaritmos: $\mathbf{Ln(y) = Ln(u^v) = v.Ln(u)}$

2º) Se deriva: $\mathbf{\frac{1}{y}.y' = v'.Ln(u) + \frac{1}{u}.u'.v}$

3º) Se despeja la derivada: $\mathbf{y' = (v'.Ln(u) + \frac{1}{u}.u'.v).y = (v'.Ln(u) + \frac{1}{u}.u'.v).u^v}$

EJERCICIOS

Calcular la derivada de las siguientes funciones, expresando el resultado de la forma mas simplificada posible:

1. $y=\sqrt[3]{x^2-4x+2}$
2. $y=(x^2-4x+5)^4+\sqrt{x^2-2x+1}$
3. $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
4. $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-1}$
5. $y=\text{sen}(x-1)^2-\text{sen}^2(x-1)$
6. $y=\text{sen}(\sqrt{e^{2x}-1})$
7. $y=\cos(\dfrac{x-1}{x+1}).\text{sen}(\sqrt{2x-1})$
8. $y=\text{tg}(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}})$
9. y = tg 3x + tg x^3 + tg^3 x
10. y = arcos ($\sqrt{x^3-2}$)
11. y = e^{3x}. $\sqrt{x^2+1}$
12. y = $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$
13. $y=10^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$
14. $y=\dfrac{Ln(x^2-1)}{x}$
15. $y=5^{\text{sen}(2x-2)}+\sqrt{\cos(2x-3)}$
16. $y=\sqrt{\text{sen}(\ln(e^{x^2-1}))}$
17. $y=Ln(\dfrac{1+\text{sen}\,x}{\text{tg}\,x})$
18. $y=\dfrac{x^2\,\text{sen}\,x}{2^x}$
19. $y=\sec(x-1)+\cos ec(2x+3)$
20. $y=\text{arcsen}\sqrt{1-4x^2}$
21. $y=ar\cos(\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x})$
22. $y=\dfrac{5^x x^5}{\sqrt{5x}}$
23. $y=\cos(5x+3)\dfrac{4}{x^2+x+1}$
24. $y=\ln\sqrt{\dfrac{x-\text{sen}\,x}{x+\text{sen}\,x}}$
25. $y=\dfrac{1-\text{sen}^2 x}{1+\text{sen}^2 x}$
26. $y=\text{sen}(\cos(tan(\sqrt{e^{x^2-1}})))$
27. $y=\sqrt{\ln(\text{sen}(tan(10^{\sec x})))}$
28. $y=arctan(\text{sen}(10^{\sqrt{x^2-1}}))$
29. $y=x^{COSX}$
30. $y=(\text{sen}\,x)^{\sqrt{x}}$
31. $y=(\text{arcsen}\,x)^{\cos x}$
32. $y=(tan(x^2-1))^{e^x}$
33. $y=(\sqrt{x^2-1})^{arctanx}$
34. $y=(\sec(2x-3))^{\ln x}$
35. $y=(\ln x)^{\text{sen}(x^2-1)}$
36. $y=(10^{\sqrt{x}})^{tanx}$
37. $y=(arctan(x^2+1))^{\cos 2x}$
38. $y=\dfrac{x^3-3}{x^2+4}$
39. $y=Ln\dfrac{x^2-1}{x^2+3}$
40. $y=Ln\dfrac{x+1}{x+3}$
41. $y=\text{sen}^5 x$
42. $y=\text{sen}\,x^5$
43. $y=(x^3+5)^{2/5}$
44. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\text{sen}^2 x}{1+\text{sen}^2 x}}$
45. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}}$

FUNCIONES

Dominio: Es el conjunto de números reales para los cuales existe imagen mediante la función f(x).

$$\text{Dom } f(x) = \{x \in R \,/\, \exists\, f(x)\}$$

Funciones polinómicas.- $f(x) = P(x)$, Dom $f(x) = R$

Funciones racionales.- $f(x) =$ Polinomio/Polinomio, Dom $f(x) = R - \{x \in R$ tales que anulan el polinomio del denominador$\}$.

$$\text{Ejemplo}: f(x) = \frac{2x-3}{x^2-9}, \text{ Dom } f(x) = R - \{\pm 3\}$$

Funciones irracionales.- $f(x) = \sqrt{g(x)}$, Dom $f(x) = \{x \in R \,/\, g(x) \geq 0\}$

Ejemplo 1: $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$, $x^2 - 5x + 6 \geq 0$, $\Rightarrow$ Tabla de signos para el radicando

$x^2 - 5x + 6 = 0$, $x = 2$, $x = 3$,   + | – | + (puntos 2, 3)   Dom $f(x) = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

Ejemplo 2: $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-3}{x+2}}$, $\dfrac{2x-3}{x+2} \geq 0$, $\Rightarrow$ Haciendo una tabla de signos tenemos:

$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3/2$
$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ + | – | + (puntos -2, 3/2)   Dom $f(x) = (-\infty, -2) \cup [3/2. \infty)$

Funciones exponenciales.- $f(x) = a^{g(x)}$, Dom $f(x) = R - \{$ Problemas de $g(x)$ $\}$.
$f(x) = a^x$, Dom $f(x) = R$

Ejemplo 1: $f(x) = e^{2x^3+3}$, Dom $f(x) = R$

Ejemplo 2: $f(x) = e^{3/x-4}$, Dom $f(x) = R - \{4\}$.

Funciones logarítmicas.- $f(x) = \log(g(x))$, Dom $f(x) = \{x \in R \,/\, g(x) > 0\}$

Ejemplo: $f(x) = \text{Ln}(x^2 - 4) \Rightarrow x^2 - 4 > 0$, hacemos $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = -2$

Hacemos una tabla de signos para $x^2 - 4$ + | – | + (puntos -2, 2)

Por lo tanto Dom $f(x) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

Funciones trigonométricas.-

$f(x) = \text{sen}(g(x)) \Rightarrow$ Dom $f(x) = R - \{$ Problemas de $g(x)$ $\}$.
$f(x) = \cos(g(x)) \Rightarrow$ Dom $f(x) = R - \{$ Problemas de $g(x)$ $\}$.
$f(x) = \text{tang}(g(x)) \Rightarrow$ Dom $f(x) = R - \{x \in R \,/\, \cos(g(x)) = 0\}$.
$f(x) = \text{Cosec}(g(x)) \Rightarrow$ Dom $f(x) = R - \{x \in R \,/\, \text{sen}(g(x)) = 0\}$.
$f(x) = \text{Sec}(g(x)) \Rightarrow$ Dom $f(x) = R - \{x \in R \,/\, \cos(g(x)) = 0\}$.
$f(x) = \text{Cotang}(g(x)) \Rightarrow$ Dom $f(x) = R - \{x \in R \,/\, \text{sen}(g(x)) = 0\}$.

Puntos de corte con los ejes:

Eje OX $\Rightarrow$ Si $y = 0$, despejando se obtienen los valores de x.
Eje OY $\Rightarrow$ Si $x = 0$, sustituyendo se obtiene el valor de y.

Simetrías:

Par $\Rightarrow$ Se tiene esta simetría cuando $f(-x) = f(x)$. En este caso la función es simétrica respecto del eje OY.

Impar $\Rightarrow$ Se tienen esta simetría cuando $f(-x) = -f(x)$. En este caso la función es simétrica respecto del origen de coordenadas, el punto (0, 0).

Asíntotas:

Verticales: Son rectas verticales x = a en las que se verifica que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ y a las cuales se acerca la función sin llegar a cortarlas cuando se dispara hacia ∞ ó -∞. Están entre los valores para los que no existe f(x).

Horizontales: Son rectas horizontales y = b a las que la función se acerca sin llegar a cortarla cuando x tiende a hacia ∞ ó -∞. Se debe verificar que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$

Oblicuas: Son rectas oblicuas y = mx + n a las cuales se acerca la función sin llegar a cortarla cuando x tiende a hacia ∞ ó -∞. Puede haber asíntotas oblicuas cuando no hay asíntotas horizontales. En ellas $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$

Monotonía: Es el estudio del signo de la primera derivada en el dominio de la función. Se hace del siguiente modo:
Obtenemos ceros y polos de f ´(x) y hacemos una tabla de signos para f ´(x) en el dominio de f(x).

- Si $f'(x_o) > 0 \Rightarrow$ f(x) es creciente en el punto x_o.
- Si $f'(x_o) < 0 \Rightarrow$ f(x) es decreciente en el punto x_o.
- Si $f'(x_o) = 0 \Rightarrow x_o$ es un posible máximo o mínimo relativo para la función f(x).

Máximos y mínimos (relativos): Son puntos x = a que anulan la primera derivada (f ´(a) = 0) y en los cuales cambia la monotonía de la función. Para calcular los máximos y mínimos de una función se puede seguir cualquiera de los dos métodos siguientes:

Método 1

a) Se hace la primera derivada de la función y se iguala a cero (f ´(x) = 0), obteniendo así los puntos singulares (x = a) de la función, (posibles máximos o mínimos).
b) Se hace la segunda derivada de la función y se sustituyen en ella los puntos singulares antes calculados, presentándose las siguientes posibilidades:
   1ª) $f''(a) > 0 \Rightarrow$ En el punto (a, f(a)) la función tiene un mínimo relativo.
   2ª) $f''(a) < 0 \Rightarrow$ En el punto (a, f(a)) la función tiene un máximo relativo.
   3ª) $f''(a) = 0 \Rightarrow$ En el punto (a, f(a)) la función puede tener un punto de inflexión.

Método 2

a) Se estudia la monotonía de la función
b) En los puntos x = a donde la función cambia de forma continua, (que no haya en ellos una asíntota vertical), de ser decreciente a ser creciente, la función tiene un mínimo relativo. En los puntos x = a donde la función cambia de forma continua, (que no haya en ellos una asíntota vertical), de ser creciente a ser decreciente, la función tiene un máximo relativo.

Curvatura: Es el estudio del signo de la segunda derivada en el dominio de f(x). Se hace del siguiente modo:
Obtenemos ceros y polos de f ´´(x) y hacemos una tabla de signos para f ´´(x) en el dominio de f(x).

- Si $f''(x_o) > 0 \Rightarrow$ f(x) es cóncava hacia arriba en el punto x_o.
- Si $f''(x_o) < 0 \Rightarrow$ f(x) es convexa en el punto x_o.

- Si $f''(x_o) = 0 \Rightarrow x_o$ es un posible punto de inflexión para la función f(x).

Puntos de inflexión: Son puntos x = a que anulan la segunda derivada ($f''(a) = 0$) y en los cuales cambia la monotonía de la función. Para calcular los puntos de inflexión de una función se puede seguir cualquiera de los dos métodos siguientes:

Método 1

a) Se hace la segunda derivada de la función y se iguala a cero ($f''(x) = 0$), obteniendo así los posibles puntos de inflexión (x = a) de la función.
b) Se hace la tercera derivada de la función y se sustituyen en ella los puntos singulares antes calculados, presentándose las siguientes posibilidades:
   1ª) $f'''(a) \neq 0 \Rightarrow$ En el punto (a, f(a)) la función tiene un punto de inflexión.
   2ª) $f'''(a) = 0 \Rightarrow$ Hay que hacer la siguiente derivada de la función. Si la primera derivada que no se anula en el punto x = a es una derivada de orden impar en el punto (a, f(a)) la función tiene un punto de inflexión, y si la primera derivada que no se anula en el punto x = a es una derivada de orden par, en el punto (a, f(a)) la función tiene un máximo o mínimo relativo dependiendo del signo del número que quede al sustituir.

Método 2

a) Se estudia la curvatura de la función
b) En los puntos x = a donde la función cambia de forma continua, (que no haya en ellos una asíntota vertical), de ser cóncava a ser convexa, o viceversa, la función tiene un punto de inflexión.

APLICACIONES DEL ESTUDIO DE FUNCIONES

Criterios para determinar el valor de los coeficientes de una función bajo diferentes condiciones de monotonía y curvatura

a) Si f(x) pasa por el punto $(x_0, y_0) \Rightarrow$ Significa que $f(x_0) = y_0$.
b) Si f(x) tiene un máximo o un mínimo relativo en $x_0 \Rightarrow$ Significa que $f'(x_0) = 0$.
c) Si f(x) tiene un punto de inflexión en $x_0 \Rightarrow$ Significa que $f''(x_0) = 0$.
d) Si la recta tangente en x_0 tiene de pendiente m $\Rightarrow$ Significa que $f'(x_0) = m$ (que dos rectas sean paralelas significa que tienen la misma pendiente).

La aplicación de estas condiciones dará lugar a un sistema de ecuaciones que hay que resolver.

Problemas de máximos y mínimos

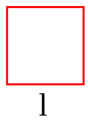
Para hacer problemas de máximos y mínimos debes seguir los siguientes pasos:

1) Dibuja el elemento geométrico y nombra sus lados.
2) Plantea una ecuación que relacione las variables y una función que hay que optimizar.
3) Despeja en la ecuación una variable en función de la otra y sustitúyela en la función.
4) Calcula los valores de x que hacen máxima o mínima la función, según se pida. Para ello haz la primera derivada, iguálala a cero con lo que obtienes los puntos críticos de esa función (posibles máximos o mínimos). Haz la segunda derivada y sustituye en ella los puntos críticos. Si al sustituir te queda un valor positivo, para ese valor hay un mínimo, y si al sustituir te queda un valor negativo, para ese valor hay un máximo.

ÁREAS Y VOLUMENES (PARA PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS)

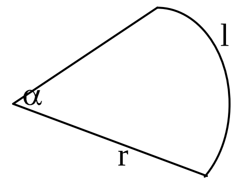
Área del cuadrado

$A = l^2$



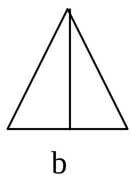
Área Sector circular

$A = \frac{r.l}{2}$



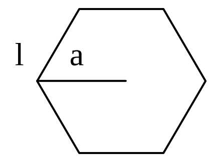
Área del triángulo

$A = \frac{bh}{2}$

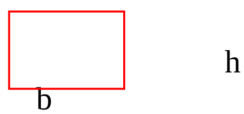


Área polígono regular

$A = \frac{perímetro.apotema}{2}$



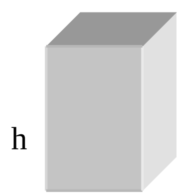
Rectángulo **Área** S= b. h



Prisma

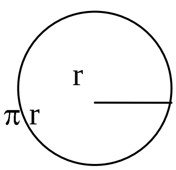
Superficie lateral Sl=perímetro de la base . altura
Superficie total S= Sl + área dos bases

Volumen V= área base . altura



Círculo

Perímetro $P = 2\pi r$
Área $S = \pi r^2$

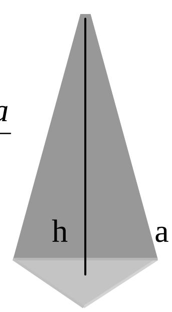


Pirámide

Superficie lateral $Sl = \frac{Perímetrobase.a}{2}$

Superficie total S= Sl + área base

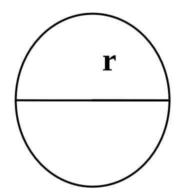
Volumen $V = \frac{áreabase.altura}{3}$



Esfera

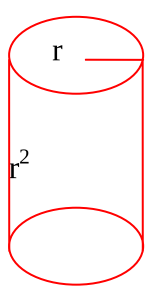
Área $S = 4\pi r^2$

Volumen $V = 4/3\, \pi r^3$



Cilindro
Superficie lateral $Sl = 2\pi r \cdot h$
Superficie total $S = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$

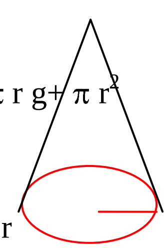
Volumen $V = \pi r^2 \cdot h$



Cono

Superficie lateral $Sl = \pi r g$
Superficie total $S = \pi r g + \pi r^2$

Volumen $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$



EJERCICIOS:

Cálculo de parámetros

1º Calcula los valores de a, b y c para que la siguiente función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un mínimo en el punto (0, 2) y un punto de inflexión en $x_0 = 2$.

2º Calcula los valores de a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en $x_0 = 2$, un punto de inflexión en (-1, 0) y su recta tangente en $x_0 = 0$ sea $y = 3x + 1$.

3º Calcula los valores de a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo en (0, -1) y un máximo relativo en (1, 0).

4º Calcula los valores de a, b, c, d y e para que la función $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ tenga un punto de inflexión en $x_0 = 0$ y en ese punto su recta tangente sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante ($y = x$), que tenga un mínimo relativo en el punto (-1, 0) y un máximo relativo en $x_0 = 2$.

5º Calcula los valores de a, b, c, y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto de inflexión en $x_0 = 0$ y en ese punto su recta tangente es $y = x$ y tenga un mínimo relativo en el punto (-1, 0).

6º Calcula los valores de a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo en (0, 2) y un máximo relativo en (-1, 0).

7º Calcula los valores de a, b, c, y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto de inflexión en $x_0 = 0$ y en ese punto su recta tangente es $y = 2x$ y tenga un mínimo relativo en el punto (1, 0).

8º Calcula los valores de a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en $x_0 = 2$, un punto de inflexión en (-1, 0) y su recta tangente en $x_0 = 0$ tenga de pendiente 3.

Problemas de máximos y mínimos

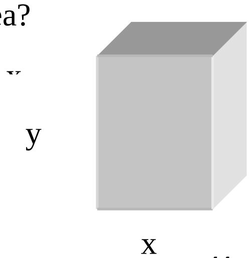
1º Dividir el número 8 en dos sumandos no negativos, tales que el cubo del primero mas el cuadrado del segundo dé el mínimo valor posible.

2º Dos números no negativos suman 40. ¿Cuál es el mínimo valor que pueden tomar la suma del cubo del primero más el triple del cuadrado del segundo, y cuánto valen los números en este caso?

3º Dos números no negativos suman 10 . ¿ Hallar el máximo y el mínimo del producto del cubo de uno de ellos por el cuadrado del otro?

4º De entre todos los rectángulos de perímetro 28 . ¿Cuál es el que tiene mayor área?

5º La suma de todos los lados de un prima recto de base cuadrada es 72 x
Calcular las dimensiones para que el volumen sea máximo
Volumen prisma = área base . altura
Área cuadrado = Lado. Lado

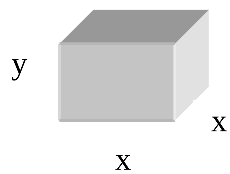


6º De entre todos los rectángulos de perímetro 40 cm determinar el que tiene la diagonal menor.

7º Se desea cercar un terreno rectangular de $60m^2$. Si la tela metálica cuesta 200 pts el metro . Determinar las dimensiones para que el gasto sea mínimo.

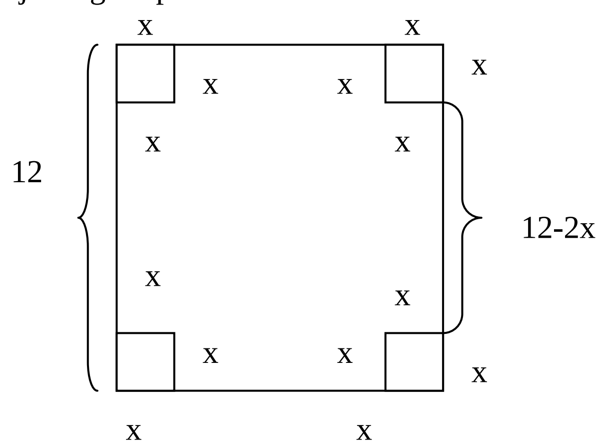
8º Las cinco caras de un estanque de base cuadrada tienen un área de $192m^2$
Calcular las dimensiones para que el volumen sea máximo.

Volumen prisma = Área de la base . altura
Área cuadrado = lado. lado
Área rectángulo = base . altura



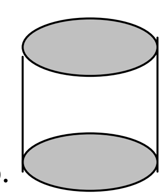
9º Hallar el volumen máximo del cono que puede generar un triángulo rectángulo al girar alrededor de uno de sus catetos , sabiendo que dichos catetos suman 12.

10º De una pieza de cartón de 12cm de lado se recorta un cuadrado en cada esquina , para formar , doblando los bordes , una caja de base cuadrada. Calcular la longitud de los lados de los cuadrados que se deben cortar, para que la caja tenga capacidad máxima.



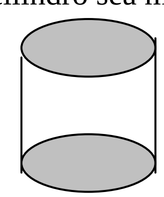
13. Un rectángulo de perímetro 12 gira alrededor de un lado y genera un cilindro, calcular las dimensiones del rectángulo para que el volumen del cilindro sea máximo.

Volumen cilindro = Área de la base . altura
Área del círculoπ r^2



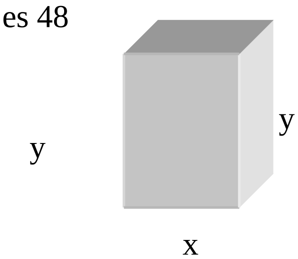
14. Un rectángulo de perímetro 20 gira alrededor de un lado y genera un cilindro, calcular las dimensiones del rectángulo para que el volumen del cilindro sea máximo.

Volumen cilindro Área de la base . altura
Área del círculoπ r^2



15. La suma de todos los lados de un prima recto de base cuadrada es 48
Calcular las dimensiones para que el volumen sea máximo

Volumen prisma = área base . altura
Área cuadrado = Lado. Lado



EJERCICIOS

Funciones

1.- Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5 ptas. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, decide disminuir el precio por unidad y por cada x unidades cobra la siguiente cantidad:

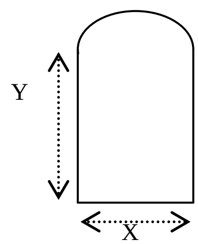
$$c(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } \quad x > 10 \end{cases}, \text{ se pide:}$$

a) Hallar a para que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿ A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran "muchísimas " unidades?.

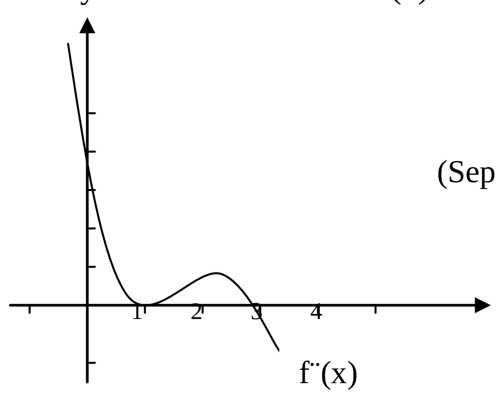
(Jun 1996 – 3 ptos)

2.- Se considera una ventana como la que se indica en la figura (la parte inferior es rectangular; la superior, una semicircunferencia). El perímetro de la ventana mide 6 m: Hallar las dimensiones x e y del rectángulo para que la superficie de la ventana sea máxima. (Expresar los resultados en función de π).



(Sep 1996 – 3 ptos)

3.- La gráfica de la función corresponde a la primera derivada de la función f(x). ¿Qué puede decirse sobre los posibles máximos y mínimos relativos de f(x)?. Razonar la respuesta.



(Sep 1996 – 3 ptos)

4.- En la perforación de cierto pozo se sabe que la extracción del metro cuadrado de tierra a una profundidad de x metros, es proporcional a x^a, para un cierto número a > 1. Llamaremos C(x) al coste de la extracción de tierra del pozo, desde la superficie hasta la profundidad de x metros.

Sabiendo que $C(2) = 8\sqrt{2}\ C(1)$, se pide: (Jun 1997 – 3 ptos)

a) Hallar a

b) Hallar la profundidad h para la que C(h) = 128 C(1).

5.- Sea f: R $\longrightarrow$ R una función derivable en R; sean a y b dos raíces de la derivada f´(x), tales que entre ellas no hay ninguna otra raíz de f´(x). Razonar debidamente si puede ocurrir cada una de las siguientes posibilidades:

a) Entre a y b no existe ninguna raíz de f(x).
b) Entre a y b existe una sola raíz de f(x). (Sep 1997 – 3 ptos)
c) Entre a y b existen dos o más raíces de f(x).

6.- Se considera la ecuación $x^3 + \lambda x^2 – 2x = 1$. Utilizando el teorema de Bolzano de los valores intermedios: (Jun. 1998, 2 ptos)

a) Probar que si $\lambda > 2$, la ecuación admite alguna solución menor que 1. (1 pto)
b) Probar que si $\lambda < 2$, la ecuación admite alguna solución mayor que 1. (1 pto)

7.- a) Determinar las funciones definidas sobre toda la recta real y que toman valores reales) que satisfacen la condición de que la pendiente de la recta tangente en un punto genérico (x, y) de su gráfica, viene dada por la expresión xe^x. (1,5 ptos)

b) Hallar los máximos y mínimos locales y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de aquella de entre las funciones del apartado anterior que pasa por el punto (0, 1). (1,5 ptos) (Jun. 1998, 3 ptos)

8.- Hallar la longitud de los lados de un triángulo isósceles de área máxima cuyo perímetro es de 60 m. (Jun. 1999, 2 ptos)

9.- Se considera la función:

$f(x) = x^2 + n\,x$ si $x < -2$
$f(x) = x^3 + m$ si $x \geq -2$

a) Determinar m y n para que cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-4,2]$. (1 pto)
b) Hallar los puntos del intervalo cuya existencia garantiza dicho teorema. (1 pto) (Jun. 1999, 2 ptos)

10.- Se considera la función:

$f(x) = x^2 + x$ si $x \geq 0$
$f(x) = e^{-x} – 1$ si $x < 0$

Contestar razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Es continua en el punto x = 0?. (1 pto)
b) ¿Es derivable en el punto x = 0?. (1 pto)
c) ¿Alcanza algún extremo?. (1 pto) (Jun. 1999, 3 ptos)

11.- Se considera un triángulo isósceles cuya base (el lado desigual) mide 10 cm y cuya altura es de 6 cm. En él se inscribe un rectángulo cuya base está situada sobre la base del triángulo.

a) Expresar el área A de dicho rectángulo en función de la longitud x de su base. (1 pto)
b) Escribir el dominio de la función A(x) y dibujar su gráfica. (1 pto)
c) Hallar el valor máximo de dicha función. (1 pto) (Sep 1999, 3 ptos)

12.- Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm^3. Averiguar las dimensiones de la caja cuya superficie exterior sea mínima. (Sep 1999, 2 ptos)

13.- a)Comprobar que $\lim_{x\to\infty}(Ln(x+1) - Ln(x)) = 0$. (1 pto) (Sep 1999, 2 ptos)

b) Calcular $\lim_{x\to\infty}(Ln(x+1) - Ln(x))$ (1 pto)

14.- Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.
a) Determinar a, b, c y d. (2 ptos) (Jun 2000 – 3 ptos)
b) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos? (1 pto)

15.- a) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga al menos un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4). (1 pto) (Jun 2000 – 2 ptos)
b) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado? (1 pto)

16.- Sea la función $f(x) = 2x + \operatorname{sen}2x$
a) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo. (1 pto)
b) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos. (1 pto) (Sep. 2000, 2 ptos)

17.- Dados tres números reales cualesquiera r_1, r_2 y r_3, hallar el número real x que minimiza la función $D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$. (Sep. 2000, 2 ptos)

18.- Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$
a) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1,5 ptos)
b) Esbozar la gráfica de la función. (0,5 ptos)
c) Calcular el área determinada por la gráfica de f(x), el eje horizontal y las rectas $x = -1$ y $x = 2$. (1 pto) (Sep. 2000, 3 ptos)

19.- Sea la función $f(x) = \operatorname{Sen} x$.
a) Calcular $a > 0$ tal que el área encerrada por la gráfica de f, el eje $y = 0$, y la recta $x = a$, sea ½. (0,5 ptos)
b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica f en el punto de abcisa $x = \pi/4$. (1 pto)
c) Calcular el área de la superficie encerrada por la tangente anterior, la gráfica de f y las rectas $x = \pi/4$; $x = 3\pi/4$. (1,5 ptos) (Jun. 2000, 3 ptos)

20.- Sea la función real de variable real definida por: $f(x) = \begin{cases} (2 - x^3) & \text{si } x \le 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
a) Razonar si la función es continua en toda la recta real. (0,5 ptos)
b) Razonar si f es derivable en toda la recta real. (0,5 ptos)
c) Determinar el área encerrada por la gráfica de f y las rectas $y = 8$; $x = 0$; $x = 2$. (1 pto) (Jun 2001, 2 ptos)

21.- a)Determinar los extremos relativos de $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibujar su gráfica. (1 pto)
b) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto P(3, -5). (1 pto) (Jun. 2001, 2 ptos)

22.- Se considera la función f(x) = $\dfrac{1}{4-x^2}$

a) Indicar el dominio de definición de f y hallar sus asíntotas. (1 pto)
b) Hallar los extremos relativos de f y sus intervalos de concavidad y convexidad. (1 pto)
c) Dibujar la gráfica de f, hallar su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo[-1, 1]. (1 pto)

23.- Se consideran las funciones f(x) = $x^2 - 2x + 3$; g(x) = $ax^2 + b$

a) Calcular a y b para que las gráficas de f y g sean tangentes en el punto de abcisa x = 2. (1 pto)
b) Para los valores de a y b calculados en el apartado anterior, dibujar las gráficas de ambas funciones y hallar la ecuación de la recta tangente común. (1 pto)
c) Para los mismos valores de a y b hallar el área limitada por las gráficas de las funciones y el eje vertical. (1 punto) (Sep 2001)

24.- Sea P(x) un polinomio de grado 4 tal que:

i) P(x) es una función par.
ii) Dos de sus raíces son x = 1; x = $-\sqrt{5}$.
iii) P(0) = 5.

Se pide:

a) Hallar sus puntos de inflexión. (1 pto)
b) Dibujar su gráfica. (1 pto) (Sep 2001)

25.- Se considera la función f(x) = xe^{3x}.

a) Estudiar y representar gráficamente la función f(x). (1,5 ptos)
b) Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre x = 0 y x = p (p> 0) vale 1/9, calcular el valor de p. (1,5 ptos)

26.- Se considera la función real de variable real definida por: f(x) = $\dfrac{1}{x^2+3}$.

a) (1 pto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abcisa positiva de la gráfica de f(x).
b) (2 ptos) Calcular el área del recinto plano acotado, limitado por la gráfica de f(x), la recta anterior y el eje x = 0. (Junio 2002)

27.- Se considera la función: f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x^2+3x+1}{x} & \text{si } x \geq -1 \\ \dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$. Se pide:

a) (0,5 ptos) Estudiar el dominio y la continuidad de f(x)
b) (1,5 ptos) Hallar las asíntotas de la gráfica de f(x)
c) (1 Pto) Calcular el área del recinto plano acotado, limitado por la gráfica de f(x) y las rectas y = 0, x = 1, x = 2. (Junio 2002)

28.- Sea f(x) una función real de variable real, derivable, con derivada continua en todos los puntos y tal que:

$f(0) = 1 \;\; ; \;\; f(1) = 2 \;\; ; \;\; f'(0) = 3 \;\; ; \;\; f'(1) = 4$

Se pide:

a) (1 punto) Calcular g´(0), siendo g(x) = f(x + f(0))

b) (2 ptos) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$ (Sep 2002)

29.- Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

a) (1 pto) Determinar sus máximos y mínimos relativos. (Sep 2003)

b) (1 pto) Calcular el valor de a > 0 para el cual se verifica la igualdad $\int_0^a f(x)dx = 1$

30.- Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si} \quad x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

a) (1 pto) Estudiar su continuidad y derivabilidad. (Sep 2002)

b) (1 pto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (3, 1)

31.- Determinar los valores de las constantes A, B C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real $f(x) = A\operatorname{sen}x + Bx^2 + Cx + D$ tiene tangente horizontal en el punto (0,4) y además su derivada segunda es $f''(x) = 3\operatorname{sen}x - 10$. (Modelo 2003)

32.- Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$

Se pide:

a) (1 pto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

b) (0,5 ptos) Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente vertical.

c) (0,5 ptos) Representar gráficamente la función.

d) (1 pto) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas x = -1, x = 1. (Modelo 2003)

Nota.- Para obtener las asíntotas se puede utilizar la igualdad: $A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$

33.- Sea la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen}x}{2 - \cos x}$, definida en el intervalo cerrado y acotado [-2π, 2π]. Se pide:

a) (1 pto) Calcular los puntos del intervalo dado donde f(x) alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

b) (1 pto) Dibujar la gráfica de f(x) en el intervalo dado.

c) (1 pto) Calcular $\int_0^{\pi/3} f(x)dx$ (Septiembre 2003)

34.- Sea la función $f(x) = 2x\,|4 - x|$.

a) (1 pto) Estudiar su continuidad y derivabilidad
b) (1 pto) Dibujar su gráfica
c) (1 pto) Calcular el área del recinto acotado por la gráfica de f(x), las rectas x = 0, x = 5, y el eje OX. (Septiembre 2003)

35.- a) (1 pto) Calcular el límite de la sucesión cuyo término general es $\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n}$ (Modelo 2004)

b) (1 pto) Sean las funciones $F(x) = \int_1^x \sqrt{5+e^{t^4}}\,dt$, $g(x) = x^2$. Calcular (F(g(x))´.

36.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x^2 - x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (Modelo 2004)

a) (1 pto) Determinar su dominio y calcular los límites laterales cuando x tiende a 1
b) (1 pto) Estudiar su continuidad y hallar el valor de a para el que f es continua en x = 0.

37.- Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{(1+sen^2 x)}$. Se pide:

a) (1 pto) Calcular sus puntos críticos en el intervalo $(-\pi,\pi)$.
b) (1 pto) Calcular los extremos relativos y/o absolutos de la función f(x) en el intervalo cerrado $[-\pi, \pi]$.
c) (1 pto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto $(\pi/4, f(\pi/4))$ (Modelo 2004)

38.- Dada la función $f(x) = 1 – x^2$, se pide:

a) (1 pto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de f en el punto P(a, f(a)), donde $0<a<1$.
b) (1 pto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado a) corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente. (Junio 2004)
c) (1 pto) Determinar el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto P(a, f(a)) es el doble de la distancia entre B y el punto P(a, f(a)).

39.- Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima. (Junio 2004)

40.- Dada la función $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

a) (1 pto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función.
b) (1 pto) Calcular $\int_0^1 f(x)dx$. (Junio 2004)

41.- Sabiendo que una función tiene como derivada $f´(x) = (x – 4)^2(x^2 – 8x + 7)$

a) (1 pto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).
b) (1 pto) Hallar los máximos y mínimos relativos de f(x), sabiendo que f(0) = 5.

c) (1 pto) ¿Es el punto x = 4 un punto de inflexión de f(x)?. Justificar razonadamente la respuesta. (Sept. 2004)

42.- Sea la función f(x) = $\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

a) (1 pto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
b) (1 pto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además que la función tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$ y $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.
c) (1 pto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la funció f(x), el eje OX y las rectas x = 0, x = 2. (Sept. 2004)

43.- a) Justificar razonadamente que la gráfica de la función f(x) = x^{15} + x + 1 corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1,1]$ (Mod 2005, 2 ptos)
b) Determinar razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

44.- a) (1 pto) Determinar el punto P contenido en el primer cuadrante, en el que se cortan la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$. (Mod 2005)
b) (1 pto) Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto P hallado en el apartado anterior y el arco de la curva $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto P

45. Se considera la función f(x) = Ln(1 + x^2), donde Ln significa logaritmo neperiano.
a) (1 pto) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los intervalos de concavidad y convexidad.
b) (1 pto) Dibujar la gráfica de f(x) (Mod 2005)
c) (1 pto) Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica en sus puntos de inflexión.

46.- Se consideran las funciones: $f(x)=\dfrac{3}{4}-x^2$ y $g(x)=|x|$ (Modelo 2005)

a) (0,5 ptos) Representar f y g en el mismo gráfico.
b) (1 pto) Calcular el ángulo formado por las dos gráficas en los puntos de corte.
c) (1,5 ptos) Calcular el área comprendida entre las dos gráficas de dichas funciones.

47.- a) (1 pto) Determinar los intervalos de de concavidad y convexidad, para $x \in [-\pi,\pi]$ de la función f(x) = 5x + cosx
b) (1 pto) Esbozar la gráfica de la función anterior en el intervalo $[-\pi,\pi]$.
c) (1 pto) Hallar el área comprendida entre las gráficas de las funciones f(x) = 5x + cosx , $g(x)=\dfrac{1}{x}+\cos x$ y las rectas x = 1, x = 2. (Modelo 2005)

48.- Calcular un polinomio de tercer grado p(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabiendo que verifica:
a) Tiene un máximo relativo en x = 1 (Junio 2005, 2 ptos)
b) Tiene un punto de inflexión en el punto (0, 1)

c) Se verifica que: $\int_0^1 p(x)dx = 5/4$

49.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$ (1,5 ptos) (Jun 2005)

b) $\lim_{x\to\infty} x(Artg(e^x)-\frac{\pi}{2})$ (1,5 ptos)

50.- Dada la función f(x) = $\frac{1}{x}$, se pide:

a) (1 pto) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto (a, f(a)), para a>0
b) (1 pto) Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado a) con los ejes coordenados
c) (1 pto) Hallar el valor de a>0 para que la distancia entre los puntos calculados en el apartado b) sea mínima. (Sep 2005)

51.- Dada la función $f(x) = Ln\frac{x^2}{x-1}$, definida para x>1, hallar un punto (a, f(a)) tal que la recta tangente a la gráfica de f(x) en ese punto sea paralela al eje OX. (Sep 2005, 2 ptos)

52.- Se considera la función $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ (Sep 2005)

a) (1 pto) Calcular los extremos locales y/o globales de la función f(x).
b) (1 pto) Determinar el valor del parámetro a tal que $\int_0^a f(x)dx = 1/4$

53.- Dada la función: f(x) = $\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$ (Modelo 2006)

a) (2 ptos) Hallar sus máximos y mínimos locales y/o globales.
b) (1 pto) Determinar el valor del parámetro a>0 para el cual es $\int_0^a f(x)dx = -1$

54.- a) (1 pto) Hallar el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones: f(x) = $\frac{2}{x}$;

$g(x) = +\sqrt{x^2-3}$ (Modelo 2006)

b) (1 pto) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demostrar que son perpendiculares.

55.- Se considera la función: f(x) = $\frac{1}{2+senx-\cos x}$. Se pide: (Modelo 2006)

a) (1 pto) Calcula los extremos locales y/o globales en el intervalo $[-\pi,\pi]$
b) (1 pto) Comprobar la existencia de al menos un punto c € $[-\pi,\pi]$ tal que f´´(c) = 0 (sugerencia utilizar el teorema de Rolle. Demostrar que en c hay un punto de inflexión.

56.- a) (1 pto) Dibujar la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

b) (1 pto) Demostrar que la sucesión $a_n=\dfrac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.

c) (1 pto) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(a_{n+1}-a_n)$ (Junio 2006)

57.- a) (1,5 ptos) Estudiar y representar gráficamente la función: $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$

b) (1,5 ptos) Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas y = 1, x = 5/2. (Junio 2006)

58.- a) (1 pto) Calcular los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & \text{si } x<0 \\ x^2+2a\cos x & \text{si } 0\le x<\pi \\ ax^2+b & \text{si } x\ge\pi \end{cases}$ sea continua para todo valor de x.

b) (1 pto) Estudiar la derivabilidad de f(x) para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior. (Sep. 2006)

59.- Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide: (Sep. 2006)

a) (1,5 ptos) Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

b) (1, 5 ptos) Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de f(x) entre $-1\le x\le 1$.

60.- Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$, se pide: (Modelo 2007)

a) (1 pto) Hallar un valor a > 0 tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto (a, f(a)) sea paralela a la recta y = -15x.

b) (1 pto) Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de f y la parte positiva del eje OX.

61.- (2 ptos) Obtener el valor de k sabiendo que : . (Modelo 2007)

62.- Se considera loa función $f(x) = x^2 + m$, donde m > 0 es una constante. (Jun. 2007)

a) (1,5 ptos) Para cada valor de m hallar el valor de a > 0 tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto (a, f(a)), pase por el origen de coordenadas.

b) Hallar el valor de m para que la recta y = x sea tangente a la gráfica de f(x).

63.- Dada la función , calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX. (Jun. 2007, 2 ptos)

64.- Dibuja la gráfica de la función , indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas. (Jun. 2007, 2 ptos)

65.- a) (1,5 ptos) Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función: (Sep 2007)

b) (1,5 ptos) Determinar la función F(x) tal que su derivada sea f(x) y además F(0) = 4.

66.- Sea g(x) una función continua y derivable para todo valor real de x, de la que se conoce la siguiente información:

i) g´(x) > 0 para todo x Є (-∞, 0) (2, +∞), mientras que g´(x) < 0 para todo x Є (0, 2)

ii) g´´ (x) > 0 Para todo x Є (1, 3) y g´´ (x) < 0 para todo x Є (-∞, 1) (3, +∞)

iii) g(-1) = 0 , g(0) = 2 , g(2) = 1

iv) (Sep. 2007)

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

a) (1 pto) Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.
b) (1 pto) Dibujar de manera esquemática la gráfica de g(x).
c) (1 pto) Si , encontrar un valor x_0 tal que su derivada $G´(x_0) = 0$.

67.- Se considera la función (Modelo 2008)

a) (1 pto) Hallar sus asíntotas y sus extremos locales.
b) (1 pto) Calcular los puntos de inflexión de f(x) y dibujar su gráfica.

68.- Calcular: b) (1 pto) (Modelo 2008)

69.- Se considera la función . Se pide: (Modelo 2008)

a) (1,5 ptos) Calcular a y b para que f sea continua y derivable en todo R.
b) (1, 5 ptos) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas x = 1 , x = 3.

70.- Calcular los siguientes límites:

a) (1 pto) b) (1 pto) (Jun. 2008)

71.- Obtener los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función , $f(x) = x(Ln(x))^2$. (Jun. 2008, 2 ptos)

72.- a) (1,5 ptos) Para cada valor c > 0, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función , el eje OX y las rectas x = 0 y x = 1.

b) (1,5 ptos) Hallar el valor de c para que el área obtenida en el apartado a sea mínima. (Jun. 2008)

73.- Dada la función , se pide:

a) (2 ptos) Dibujar la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

b) (1 pto) Calcular : . (Sep. 2008)

74.- a) (1,5 ptos) Calcular: (Sep. 2008)

b) (1,5 ptos) Utilizar el cambio de variable x = $e^t - e^{-t}$, para calcular:

Indicación: Para deshacer el cambio de variable utilizar

75.- Sea (Modelo 2009)

a) (1 pto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f(x)
b) (1 pto) Hallar los máximos y mínimos locales de f(x)
c) (1 pto) Dibujar la gráfica de f(x).

76.- Sea: (Modelo 2009)

a) (1 pto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en x = 0
b) (1 pto) Estudiar cuando se verifica que f´(x) = 0. Puesto que f(1) = f(-1), ¿existe contradicción con el Teorema de Rolle en el Intervalo

77.- Sea . Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de f(x) y por la recta y = 1. (Modelo 2009)

78.- (2 puntos) Calcular el siguiente límite, según los diferentes valores del parámetro α

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{x+1}$$ (Junio 2009)

79.- Si la derivada de una función f(x) es $f'(x) = (x-1)^3(x-5)$, obtener:

a) (1 pto) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
b) (1 pto) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos o puntos de inflexión.
c) (1 pto) la función f sabiendo que f(0) = 0. (Junio 2009)

80.- Dada la función: , se pide:

a) (1, 5 ptos) Hallar los valores de a y b para los cuales f es una función continua en x = 0.
b) (1,5 ptos) Para a = b = 1, estudiar si la función f es derivable en x = 0, aplicando la definición de derivada. (Sep 2009)

81.- a) (1 pto) Dada la función , halla el punto o los puntos de la gráfica de f en los cuales la pendiente de la recta tangente sea 1.

b) (0,5 ptos) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto X = 0.
c) (1,5 ptos) Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real y tal que . Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo (0, 2) tal que g´(c)=1. (Sept 2009)

82.- Dada la función $f(x) = e^x + a\,e^{-x}$, siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a.

a) (1,5 ptos) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) (1 pto) Estudiar para que valor, o valores de a, la función f tiene alguna asíntota horizontal.

c) (0,5 ptos) Para $a \geq 0$, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$. (Modelo 2010)

83.- Dada la función: $f(x) = x^3 - x$, se pide: (Modelo 2010)

a) (1 pto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica f en el punto (-1, f(-1))

b) (1 pto) Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f.

c) (1 pto) Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado a).

INTEGRALES

Lo primero que debes hacer es determinar a cual de los siguientes tipos pertenece la integral:

a) Integrales inmediatas:. Son las que se resuelven utilizando una fórmula de la tabla. Pueden ser de los siguientes tipos:

a) Potenciales:

a. Se diferencian porque tienen una función (casi siempre un polinomio) elevada a un número
b. Se trata de conseguir dentro de la integral la derivada de la base de la potencia. Esto siempre se consigue multiplicando o dividiendo por un número.
c. Se resuelven utilizando las siguientes fórmulas: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$;

$\int u'.u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$, para todo n ≠ -1.

b) Logarítmicas:

a. Se diferencian porque tienen numerador y denominador. En el denominador hay una función de potencia uno y en el numerador está la derivada del denominador.
b. Se trata de conseguir en el numerador la derivada del denominador. Esto siempre se consigue multiplicando o dividiendo por un número.
c. Se resuelven utilizando la fórmula: $\int \frac{u'}{u} dx = Ln|u| + c$

c) Exponenciales:

a. Se diferencian porque tienen un número en la base (casi siempre el número e) y una función que depende de x en el exponente.
b. Se trata de conseguir la derivada de la función del exponente. Esto siempre se consigue multiplicando o dividiendo por un número.
c. Se resuelven utilizando las fórmulas: $\int u'.a^u dx = \frac{a^u}{Lna} + c$; $\int u'.e^u dx = e^u + c$

d) Trigonométricas:

a. Se diferencian porque hay que integrar funciones: seno, coseno, $\sec^2$ ó cosec^2.
b. Se trata de conseguir la derivada del ángulo de la función trigonométrica. Esto siempre se consigue multiplicando o dividiendo por un número.
c. Se resuelven utilizando las fórmulas:

$$\int u'.sen(u)dx = -\cos(u) + c \qquad \int u'\cos(u)dx = sen(u) + c$$

$$\int u'.\sec^2(u)dx = \tan(u) + c \qquad \int u'.\cos ec^2(u)dx = \cot an(u) + c$$

e) Arcos:

a. Se diferencian porque en el denominador pone nº + (algo)^2, ó $\sqrt{n^o - (a\lg o)^2}$
b. Se trata de conseguir en el numerador la derivada de (algo). Esto siempre se consigue multiplicando o dividiendo por un número.
c. Se resuelven utilizando las fórmulas:

$$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = Arctag(u) + c \qquad \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = Arcsen(u) + c$$

b) Método de integración por partes:.Son $\int Ln$, $\int$Arc, $\int$producto de dos funcines no relacionadas

Se resuelven tomando partes dentro de la integral del siguiente modo

Se llama U = LA PARTE $\longrightarrow$ dU = (se hace el diferencial de U)

Se llama dV = todo lo restante $\longrightarrow$ V = $\int dV$

Una vez tomadas las partes se aplica la fórmula $\int U\,dV = U\,V - \int V\,dU$

c) Integrales de funciones racionales:. Son $\int \frac{Polinomio}{Polinomio}$ y el polinomio del numerador no es la derivada del polinomio del denominador.

Pueden ser de dos tipos:

1.- Si grado de numerador ≥ grado del denominador. Entonces se divide y se aplica la fórmula

$$I = \int cociente + \int \frac{resto}{divisor}$$

2.- Si grado de numerador < grado del denominador. Entonces se descompone el polinomio del denominador como producto de factores primos, y según sean sus raíces podemos tener los siguientes casos:

* Raíces reales simples, $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)...$

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + ...$, todas estas integrales son Ln, $I = A.Ln|x - x_1| + B.Ln|x - x_2| + ...$

* Raíces reales múltiples, $Q(x) = (x - x_1)^3(x - x_2)^2(x - x_3)...$

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x - x_1)^3} + \frac{B}{(x - x_1)^2} + \frac{C}{x - x_1} + \frac{D}{(x - x_2)^2} + \frac{E}{x - x_2} + \frac{F}{x - x_3}$ ...estas integrales son Ln o potenciales,

$$I = A\frac{(x - x_1)^{-2}}{-2} + B\frac{(x - x_1)^{-1}}{-1} + C\,Ln|x - x_1| + D\frac{(x - x_2)^{-1}}{-1} + E\,Ln|x - x_2| + F\,Ln|x - x_3| + ...$$

* Raíces complejas, $Q(x) = (ax^2+bx+c)(x - x_1)...$, donde las raíces de ax^2+bx+c son números complejos de la forma $m \pm ni$, donde m es la parte real de las raíces y n es la parte imaginaria.

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x - m)^2 + n^2} + \frac{A}{x - x_1}$ +..., la primera de estas integrales se resuelve utilizando la fórmula, $\int \frac{Mx + N}{(x - m)^2 + n^2}\,dx = \frac{M}{2} Ln|ax^2 + bx + c| + \frac{Mm + N}{n} Arctang\left(\frac{x - m}{n}\right) + C$

d) Integrales trigonométricas no inmediatas

1.- Algunas se resuelven utilizando las fórmulas de trigonometría y descomponiendo

2.- Las restantes se hacen mediante cambios de variable

2.1.- Integrales con sumas y restas: Se cambia tang(x/2) = t, de donde Senx = $\frac{2t}{1 + t^2}$

Cosx = $\frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, y dx = $\frac{2dt}{1 + t^2}$

2.2.- Integrales con productos y/o divisiones:

2.2.1.- Impares en seno: Se cambia cosx = t, de donde senx = $\sqrt{1-t^2}$, y dx = $\dfrac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$

2.2.2.- Impares en coseno: Se cambia senx = t, de donde cosx = $\sqrt{1-t^2}$,dx = $\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

2.2.3.- Pares en seno y coseno: Se utilizan las fórmulas $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ y sen2x = 2senx.cosx

2.2.4.- Potencias de tang o de cotang: Se utilizan las fórmulas $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ (Recordar que $\sec^2 x$ es la derivada de tangx)

2.2.5.- Transformación de productos en sumas: Se utilizan las fórmulas siguientes

$$Sen\alpha . Cos\beta = \frac{1}{2}\left[Sen(\alpha+\beta) + Sen(\alpha-\beta)\right]$$

$$Cos\alpha . Cos\beta = \frac{1}{2}\left[Cos(\alpha+\beta) + Cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$Sen\alpha . Sen\beta = \frac{1}{2}\left[Cos(\alpha-\beta) - Cos(\alpha+\beta)\right]$$

e) Integrales de funciones irracionales: Se hacen todas por cambio de variable

1.- Si hay sumas y/o restas y x está elevado a uno, se cambia $x = t^{\text{mcm de los índices}}$

2.- Raíces de polinomios de grado dos, $\sqrt{ax^2+bx+c}$

2.1.- Si a>0, se cambia $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$

2.2.- Si a<0 y c>0, se cambia $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$

2.3.- Si a<0 y c<0, se cambia $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}$, donde alfa y beta son las raíces de la ecuación.

EJERCICIOS

1.- INTEGRALES

a) Realizar las siguientes integrales inmediatas:

1. $\int (\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[3]{x} - 6x^3 + 4x^2 + 3x - 1)dx$
2. $\int \frac{6\sqrt[4]{x^3} - 5x^4 + 2x - 8}{x^2} dx$
3. $\int \frac{3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx$
4. $\int (x-3)(x^2 - 6x - 5)^5 dx$
5. $\int (x+2)\sqrt[4]{x^2 + 4x - 8} dx$
6. $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{(x^3 + 6x - 3x + 2)^4} dx$
7. $\int \frac{5x^2 + 10x + 5}{\sqrt[5]{x^3 + 3x^2 + 3x - 9}} dx$
8. $\int Sen^3(3x-1)Cos(3x-1)dx$
9. $\int \frac{\text{sen}(\sqrt{x^2 - 4x + 2})(x-2)}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}} dx$
10. $\int e^{\sqrt{x^2 - 6x + 1}} \frac{x-3}{\sqrt{x^2 - 6x + 1}} dx$
11. $\int 10^{\text{sen}(x^2 - 6x + 1)} \cos(x^2 - 6x + 1)(x-3)dx$
12. $\int \sec^2(x^2 - 10x + 1)(x-5)dx$
13. $\int \frac{\cos(x^2 - 4x + 7)(x-2)}{\text{sen}(x^2 - 4x + 7)} dx$
14. $\int \frac{\text{sen}(\ln(x-2))}{x-2} dx$
15. $\int \frac{7\cos(\sqrt{x-3})}{\sqrt{x-3}} \text{dx}$
16. $\int e^{tan(x^2 - 2x + 5)}(x-1)Sec^2(x^2 - 2x + 5)dx$
17. $\int \sec^2(x^2 - 2x + 3)(X-1)dx$
18. $\int \frac{e^{2x-1}}{\cos^2(e^{2x-1})} dx$
19. $\int (x-2)(1 + tan^2(x^2 - 4x + 9))dx$
20. $\int \frac{\text{sen(artg(x -1))}}{\text{x}^2 - 2x + 2} dx$
21. $\int \frac{x}{\cos^2(\sqrt{x^2 + 3})\sqrt{x^2 + 3}} dx$
22. $\int \frac{\text{sen}(\text{arcsen}(2x))}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$
23. $\int \text{sen}(\cos(x-1))\text{sen}(x-1)dx$
24. $\int 10^{tan(4x-2)} \sec^2(4x-2)dx$
25. $\int e^{\frac{x-1}{x+1}} \frac{1}{(x+1)^2} dx$
26. $\int 2^{\cos(\ln x)} \frac{\text{sen}(\ln x)}{x} dx$
27. $\int \frac{5x-6}{4+x^2} dx$
28. $\int \frac{3x-7}{5+x^2} dx$

b) Calcular las siguientes integrales por partes:

1. $\int xe^{-x/2}d$
2. $\int x^3(Lnx)^2\,dx$
3. $\int x^3\cos 2x dx$
4. $\int x^2 e^{5x}dx$
5. $\int x^2 Sen(3x-1)dx$
6. $\int xArctangx.dx$
7. $\int Arc\,\text{sen}\,x.dx$
8. $\int e^{-x/2}Cos5dx$

c) Calcular las siguientes integrales de funciones racionales:

1. $\int \frac{x-2}{x^2-x-3}dx$
2. $\int \frac{x^3+3x+1}{x^3-x^2-2x}dx$
3. $\int \frac{x^2+3}{x(x-3)(x+2)}dx$
4. $\int \frac{x^2+5}{x^2-1}dx$
5. $\int \frac{x-1}{x^2+4x+4}dx$
6. $\int \frac{x+6}{x^2+x+1}dx$

2.- Hallar el área finita limitada por la curva de ecuación $y = x^2 – 4x$, y el eje $y = 0$.

3.- Calcular el área encerrada entre las gráficas de las líneas $y = x$, e $y = x(6 – x)$. (Jun. opt. 1990)

4.- Dada la función $y=\frac{2x^2}{9-x^2}$. Calcular el área acotada por dicha curva y la recta $y = 1$

5.- Hallar el área de la región acotada del plano limitada por las parábolas $y = x^2 – x$, $y^2 = 2x$.

6.- Calcular el área de la región del semiplano $y \geq 0$ limitada por la curva $y=\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$
y = Lnx, su tangente en x = 1 y la recta x = 3.

7.- Dibujar la curva $y = x^2 – 3x –10$ y calcular el área del recinto limitado por esta curva y la recta $y = 2x – 4$.

8.- Hallar el área de las regiones comprendidas entre la curva $y = x^2$ y las rectas $y = x$, $x = 0$, $x = 2$

9.- Calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = Lnx$, el eje OX y la recta tangente a dicha gráfica en el punto $x = e$.

10.- Hallar el área de la región comprendida entre las parábolas $y = x^2$, $y = -2x^2 + 3$.

EJERCICIOS PAU

1.- Dos hermanos heredan una parcela que han de repartirse en partes iguales. La parcela es la región plana encerrada entre la parábola y = x^2 y la recta y = 1. Deciden dividir la parcela mediante una recta y = a paralela a la recta y = 1. Hallar el valor de a. (Jun 1996 – 3 ptos)

2.- Si $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$, ¿se verifica entonces qué $\int_{-a}^{a} xf(x)\ dx = 0$?. Si fuese siempre cierto, pruébese; si pudiera ser falso póngase un ejemplo que lo confirme. (Sep 1996 – 2 ptos)

3.- Calcular el valor de la integral $\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \operatorname{sen} x dx$. (Jun. 1998, 2 puntos)

4.- Sean las funciones f(x) = x^2 y g(x) = x^3. Determinar el área encerrada por las gráficas de ambas funciones y la recta x = 2. (Jun 2000 – 2 ptos)

5.- a)Hallar el valor de la integral definida $\displaystyle\int_{-10}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}} dx$. (1,5 ptos)

b) Calcular la integral indefinida de la función f(x) = $\dfrac{1}{1-e^x}$, mediante un cambio de variable. (1,5 ptos)

6.- Sea la función f(t) = $\dfrac{1}{1+e^t}$

a) Calcular $\int f(t)dt$. (1 pto)

b) Se define g(x) = $\int_0^x f(t)dt$. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}$. (1 pto) (Sep 2001)

7.- Dada la parábola y = 4 – x^2, se considera el triángulo rectángulo T(r) formado por los ejes coordenados y la tangente a la parábola en el punto de abcisa x = r >0.

a) Halla r para T(r) tenga área máxima.
b) Calcular el área de la región delimitada por la parábola, su tangente en el punto de abcisa x = 1, y el eje vertical. (3 ptos)

8.- Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^2+4}{x^2-5x+6} dx \qquad \text{(Modelo 2003)}$$

9.- Sea f(x) una función derivable en (0, 1) y continua en $[0,1]$, tal que f(1) = 0 y $\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$.

Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\int_0^1 f(x)dx$. (Junio 2005, 2ptos)

10.- Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$ (Sep. 2006, 2 ptos)

11.- a) (1 pto) Si f es una función continua, obtener F´(x) siendo: $F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3)dt$

b) (2 ptos) Si f(1) = 1 y además $\int_0^x f(t)dt = 1$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F(x) en el punto (1, F(1)). (Modelo 2007)

12.- (2 ptos) Calcular la integral: F(x) = $\int_0^x t^2 e^{-t} dt$ (Junio 2009)