Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:

3º B de ESO

Capítulo 5:

Ecuaciones y sistemas

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Hernández

Revisores: Sergio Hernández y María Molero

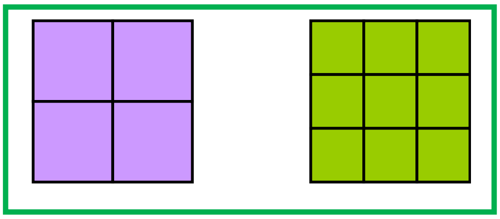
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

Ya sabes resolver algunas ecuaciones de segundo grado. Si el área de un cuadrado es 4 conoces que su lado es 2, y si el área es 9, conoces que el lado mide 3.

Sabes resolver $x^2 = 4$, cuyas soluciones son 2 y –2, porque $(2)^2 = 4$, y $(-2)^2 = 4$.



Recuerda

Si el producto de dos factores es cero, uno de los factores debe ser cero.
Por tanto en la ecuación:

$$(x + 4) \cdot (x - 3) = 0$$

o bien $x + 4 = 0$ o bien $x - 3 = 0$, por lo que $x = -4$ y $x = 3$.

Para resolver $(x - 3) \cdot (x + 4) = 0$, observas que las soluciones son 3 y –4 pues $(3 - 3)\cdot(3 + 4) = 0$, y $((-4) -3)\cdot((-4) + 4) = 0$.

En este capítulo aprenderemos a resolver las ecuaciones de segundo grado, ya sean completas o incompletas, y a utilizar lo aprendido para resolver problemas de la vida cotidiana por medio de las ecuaciones.

Veremos además qué son los sistemas de ecuaciones lineales, cómo se resuelven por diferentes métodos y su aplicación para resolver problemas que nos rodean.

1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1.1. El lenguaje de las ecuaciones

Ya sabes que:

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo:

- Si tenemos dos expresiones algebraicas: $7x + 3$ y $5x + 2$, y las unimos con el signo igual obtenemos una ecuación: $7x + 3 = 5x + 2$.

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama **primer miembro** y la que está a la derecha, **segundo miembro**.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "*desconocidas*". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

Ejemplo:

- $8x – 2 = 4x + 7$ es una ecuación con una sola incógnita, mientras que
- $3x + y = 5$ o $5x – 9 = 3y$ son ecuaciones con dos incógnitas: x e y.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente que aparece en alguna de sus incógnitas.

Ejemplo:

- $8x – 2 = 4x + 7$ es una ecuación de primer grado, mientras que $2x + 4xy^2 = 1$ es una ecuación de tercer grado ya que el monomio $5xy^2$ tiene grado 3 ($1 + 2 = 3$).

Actividades propuestas

1. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$8x – 1 = 4x – 7$			
	$5x + 9$	$3x – 1$	
$2a + 3 = 32$			
	$2x – 5y$	$5 + 4y$	

2. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:

a) $4\,x – 5y = 7x + 6$; b) $2x + 8y^2 = 5$ c) $3a + 6a^2 = 3$ d) $4x + 8x^2 = 12$.

3. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

a) $2x – 4 = 6x + 8$; b) $3x + 9y^2 = 12$ c) $5x + 10x^2 = 30$ d) $2x + 2xy^2 = 3$

1.2. Ecuaciones equivalentes. Resolución de ecuaciones

Ya sabes que:

Una **solución** de una ecuación es un número que, cuando la incógnita toma ese valor, se verifica la igualdad, es decir, los dos términos de la ecuación valen lo mismo.

Algunas ecuaciones solo tienen una solución, pero otras pueden tener varias.

Resolver una ecuación es encontrar todas sus posibles soluciones numéricas.

Para resolver una ecuación lo que se hace habitualmente es transformarla en otra ecuación **equivalente** más sencilla.

Ecuaciones equivalentes son las que tienen las mismas soluciones.

Ejemplo:

- $2x - 9 = 15$ es equivalente a $2x = 24$, puesto que la solución de ambas ecuaciones es $x = 12$.

Para obtener ecuaciones equivalentes se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.

Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación $5x + 7 = x - 3$ transformándola en otra más sencilla equivalente.

Transformar una ecuación hasta que sus soluciones se hagan evidentes se llama "*resolver la ecuación*". Siguiendo estos pasos intentaremos resolver la ecuación: $5x + 7 = x - 5$.

1) Sumamos a los dos miembros $-x$ y restamos a los dos miembros 7: $5x - x + 7 - 7 = x - x - 5 - 7$.

2) Hacemos operaciones y conseguimos otra ecuación que tiene en el primer miembro los términos con x y en el segundo, los términos sin x: $5x - x = -5 - 7$.

3) Efectuamos las sumas en el primer miembro y en el segundo: $4x = -12$.

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 4: $\frac{4x}{4} = \frac{-12}{4}$ de donde $x = -3$.

5) Comprueba que todas las ecuaciones que hemos obtenido en este proceso son equivalentes y que su solución es $x = -3$.

El procedimiento utilizado en las actividades es un método universal para **resolver** cualquier ecuación de grado 1, es decir, donde x aparece sin elevar a otro exponente como en x^2. Las ecuaciones de primer grado tienen siempre una única solución, pero en general, las soluciones no tienen porqué ser números enteros como en los ejemplos.

Actividades propuestas

4. Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $2x - 3 = 4x - 5$ b) $3x + 6 = 9x - 12$ c) $4x + 8 = 12$

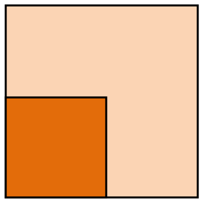
Autora: Raquel Hernández
Revisor: Sergio Hernández y María Molero
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

2. ECUACIONES DE 2º GRADO

Hay ecuaciones de segundo grado que ya sabes resolver. En este capítulo vamos a profundizar y a aprender a resolver este tipo de ecuaciones. Por ejemplo, el siguiente problema ya sabes resolverlo:

Actividades resueltas

- Se aumenta el lado de una baldosa cuadrada en 3 cm y su área ha quedado multiplicada por 4, ¿Qué lado tenía la baldosa?



Planteamos la ecuación:

$$(x + 3)^2 = 4x^2$$

¡Esta ecuación si sabes resolverla! $x + 3 = 2x$, luego el lado es de 3 cm.

Hay otra solución, $x = -1$, que no tiene sentido como lado de un cuadrado.

Vamos a estudiar de forma ordenada estas ecuaciones.

2.1. Concepto de ecuación de 2º grado

Una **ecuación de segundo grado** es una ecuación polinómica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Las ecuaciones de segundo grado se pueden escribir de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde *a, b* y *c* son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplo:

- Son ecuaciones de 2º grado por ejemplo

$$3x^2 - 7x + 1 = 0; \qquad -2x^2 + 5x + -2 = 0; \qquad x^2 - 9x - 11 = 0.$$

Ejemplo:

- Los coeficientes de las ecuaciones de 2º grado son números reales, por lo tanto pueden ser fracciones o raíces. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0; \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0; \quad -2{,}7x^2 + 3{,}5x - 0{,}2 = 0; \qquad \sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0.$$

Actividades propuestas

5. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $8x^2 - 9 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $3xy^2 - 5 = 0$ d) $8 - 7{,}3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

6. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son *a*, *b* y *c*.

a) $3 - 4x^2 + 9x = 0$ b) $-3x^2 + 5x = 0$

c) $2x^2 - 3 = 0$ d) $x^2 - 8x + 1 = 0$

2.2. Resolución de ecuaciones de 2º grado completas

Se llama **ecuación de segundo grado completa** a aquella que tiene valores distintos de cero para *a*, *b* y *c*.

Para resolver las ecuaciones de segundo grado completas, usaremos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula nos permite calcular las dos soluciones de nuestra ecuación.

Llamaremos **discriminante** a la parte de la fórmula que está en el interior de la raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 - 5x + 6 = 0$

Primero debemos saber quiénes son *a*, *b* y *c:*

$$a = 1;\ b = -5;\ c = 6$$

Sustituyendo estos valores en nuestra fórmula, obtenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Por lo tanto, nuestras dos soluciones son:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; \qquad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

En efecto, $3^2 - 5\cdot3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, y $2^2 - 5\cdot2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, luego 3 y 2 son soluciones de la ecuación.

Actividades propuestas

7. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 4x - 12 = 0$

2.3. Número de soluciones de una ecuación de 2º grado completa

Antes hemos definido lo que era el **discriminante**, ¿te acuerdas?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para saber cuántas soluciones tiene una ecuación de 2º grado, nos vamos a fijar en el signo del discriminante.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una única solución real (las dos soluciones son iguales, es por tanto una solución doble).

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene ninguna solución real.

Ejemplo:

- a) La ecuación $2x^2 - 4x - 7 = 0$ tiene como discriminante:

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 2\cdot(-7) = 16 + 36 = 52 > 0$$

  Por lo tanto, la ecuación dada tiene 2 soluciones reales y distintas.

- b) La ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$ tiene como discriminante:

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot(-5) = 16 + 20 = 36 > 0$$

  Por lo tanto, la ecuación dada tiene 2 soluciones reales y distintas, 5 y –1.

  Comprobación: $5^2 - 4\cdot 5 - 5 = 25 - 20 - 5 = 0$ y $(-1)^2 - 4(-1) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$).

- c) La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene como discriminante:

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

  Por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales. Se puede escribir como:

  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$, que tiene la solución doble $x = 1$.

- d) La ecuación $x^2 + 3x + 8 = 0$ tiene como discriminante

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4\cdot 1\cdot(8) = 9 - 32 = -23 < 0$$

  Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real. Ningún número real verifica la ecuación.

Actividades propuestas

8. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 + x + 4 = 0$ **b)** $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $x^2 - 6x - 7 = 0$ **d)** $x^2 - 3x + 5 = 0$

2.4. Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas

Llamamos **ecuación de 2º grado incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que el coeficiente *b* vale 0 (falta *b*), o el coeficiente *c* vale 0 (falta *c*).

Ejemplo:

- La ecuación de 2º grado $2x^2 - 18 = 0$ es incompleta porque el coeficiente $b = 0$, es decir, falta *b*.
- La ecuación de 2º grado $3x^2 - 15x = 0$ es incompleta porque no tiene *c*, es decir, $c = 0$.

Las ecuaciones de 2º grado incompletas se resuelven de una manera u otra dependiendo del tipo que sean.

Resumen

Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, sacamos factor común:

$$x = 0 \text{ y } x = \frac{-b}{a}.$$

Si el coeficiente *b* = 0: Despejamos la incógnita normalmente, como hacíamos en las ecuaciones de primer grado:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el coeficiente *c* = 0: Sacamos factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Para que el producto de dos factores valga cero, uno de los factores debe valer cero.

Por tanto $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Ejemplo:

- En la ecuación $2x^2 - 18 = 0$ falta la *b*. Para resolverla despejamos la incógnita, es decir, x^2:

$$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 18/2 = 9$$

Una vez que llegamos aquí, nos falta quitar ese cuadrado que lleva nuestra incógnita. Para ello, haremos la raíz cuadrada en los 2 miembros de la ecuación:

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Así hemos obtenido las dos soluciones de nuestra ecuación, 3 y –3. En efecto, $2 \cdot 3^2 - 18 = 2 \cdot 9 - 18 = 0$, y $2 \cdot (-3)^2 - 18 = 2 \cdot 9 - 18 = 0$

Ejemplo:

- En la ecuación $3x^2 - 15x = 0$ falta la c. Para resolverla, sacamos factor común:

$3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$

Una vez que llegamos aquí, tenemos dos opciones

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Así hemos obtenido las dos soluciones de la ecuación $x = 0$ y $x = 5$

Una ecuación de segundo grado incompleta también se puede resolver utilizando la fórmula de las completas pero es un proceso más lento y es más fácil equivocarse.

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación de 2º grado $2x^2 - 32 = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la b. Por lo tanto, despejamos la incógnita

$2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 32/2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$. Las raíces son 4 y –4.

- Resuelve la ecuación de 2º grado $x^2 + 7x = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la c. Por lo tanto, sacamos factor común:

$x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x + 7) = 0$

y obtenemos las dos soluciones:

$$x = 0 \text{ y } x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7.$$

Actividades propuestas

9. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $3x^2 - 27 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 9 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$

2.5. Suma y producto de raíces

Si en una ecuación de segundo grado: $x^2 + bx + c = 0$, con $a = 1$, conocemos sus soluciones: x_1 y x_2 sabemos que podemos escribir la ecuación de forma factorizada:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Hacemos operaciones:

$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0,$

por lo que el coeficiente c es igual al producto de las soluciones y la suma de las soluciones es igual al opuesto del coeficiente b, es decir, $-b$.

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = c;\ x_1 + x_2 = -b.}$$

Si la ecuación es $ax^2 + bx + c = 0$, dividiendo por a, ya tenemos una de coeficiente $a = 1$, y obtenemos que:

$$\boldsymbol{x_1\, x_2} = \frac{c}{a};\ \boldsymbol{x_1 + x_2} = \frac{-b}{a}$$

Esta propiedad nos permite, en ocasiones, resolver mentalmente algunas ecuaciones de segundo grado.

Actividades resueltas

- Resuelve mentalmente la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Buscamos, mentalmente dos números cuyo producto sea 6 y cuya suma sea 5. En efecto, $2 \cdot 3 = 6$, y $2 + 3 = 5$, luego las soluciones de la ecuación son 2 y 3.

- Resuelve mentalmente la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$.

El producto debe ser 9. Probamos con 3 como solución, y en efecto $3 + 3 = 6$. Las soluciones son la raíz 3 doble.

- Resuelve mentalmente la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$.

Las soluciones son -1 y 2, pues su producto es -2 y su suma 1.

- Resuelve mentalmente la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$.

Las soluciones son 1 y -2, pues su producto es -2 y su suma -1.

Actividades propuestas

10. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 + 6x = 0$ b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$ d) $x^2 - 9x + 20 = 0$

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 21 = 0$

11. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 3 y 7.

12. El perímetro de un rectángulo mide 16 cm y su área 15 cm². Calcula sus dimensiones.

13. Si 3 es una solución de $x^2 - 5x + a = 0$, ¿cuánto vale a?

2.6. Resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos

Durante siglos los algebristas han buscado fórmulas, como la que ya conoces de la ecuación de segundo grado, que resolviera las ecuaciones de tercer grado, de cuarto, de quinto… sin éxito a partir del quinto grado. Las fórmulas para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado son complicadas. Sólo sabemos resolver de forma sencilla algunas de estas ecuaciones.

Ejemplo:

- Resuelve: $(x-5)\cdot(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x-9)\cdot(x-6)=0$.

Es una ecuación **polinómica** de grado cinco, pero al estar factorizada sabemos resolverla pues para que el producto de varios factores sea cero, uno de ellos debe valer cero. Igualando a cero cada factor tenemos que las soluciones son 5, 3, –2, 9 y 6.

Ecuaciones bicuadradas

Una **ecuación bicuadrada** es una ecuación de la forma $ax^{2n}+bx^{n}+c=0$.

Para resolverla, hacemos el cambio $x^n=t$, convirtiéndola así en una ecuación de segundo grado de fácil resolución.

Cuando hayamos calculado el valor de t, deshacemos el cambio efectuado, $x=\sqrt[n]{t}$ para obtener la solución x.

Las ecuaciones bicuadradas más comunes son las de cuarto grado

Ejemplo:

- *Para resolver la ecuación bicuadrada* $x^4-10x^2+9=0$, hacemos el cambio obteniendo la ecuación de segundo grado $t^2-10t+9=0$.

Resolvemos dicha ecuación de segundo grado:

$$t=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}=\frac{10\pm8}{2}$$
$$t_1=\frac{10+8}{2}=9 \quad y \quad t_2=\frac{10-8}{2}=1$$

Deshacemos el cambio para obtener los valores de x:

$$Si\ t_1=9\rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm3$$
$$Si\ t_2=1\rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm1$$

Actividades resueltas

- *La ecuación* $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ es una ecuación polinómica de cuarto grado, pero con una forma muy especial, es una ecuación **bicuadrada**, porque podemos transformarla en una ecuación de segundo grado llamando a x^2 por ejemplo, t.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Una solución de la ecuación de segundo grado es $t = 4$, y la otra es $t = 1$.

Por tanto si $t = x^2 = 4$, entonces $x = 2$ y $x = -2$.

Y si $t = x^2 = 1$, entonces $x = 1$ y $x = -1$.

Nuestra ecuación de cuarto grado tiene cuatro soluciones:

2, –2, 1 y –1.

Actividades propuestas

14. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x - 7) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x - 11) = 0$

b) $3(x - 5) \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$

c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$.

16. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

3.1. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Donde *a, b, a'* y *b'* son números reales que se denominan **coeficientes** y *c* y *c'* también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par de valores (*x*, *y*) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes**, cuando tienen la misma solución.

Ejemplo 7:

- Son sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4y + 2 = 3x \\ 7x - 3 = 5y \end{cases}$$

Ejemplo 8:

- **No** es un sistema lineal $\begin{cases} 3xy + 5y = 7 \\ 4x - 8xy = 9 \end{cases}$ porque tiene términos en *xy*.

Tampoco lo es $\begin{cases} 3x^2 + 5y = 7 \\ 4x - 8y = 9 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2.

Actividades propuestas

17. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} xy + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

3.2. Clasificación de sistemas de ecuaciones

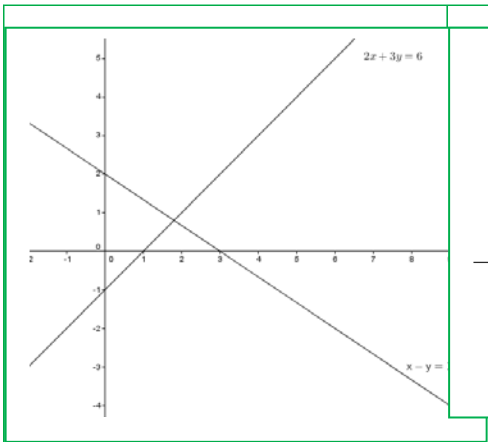
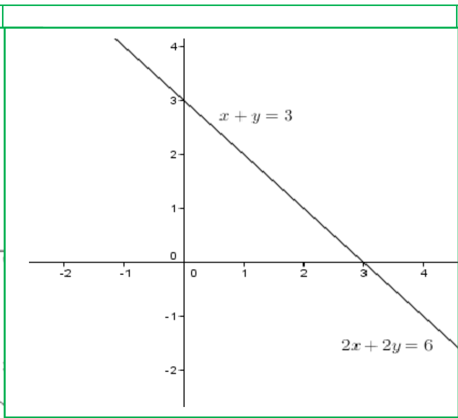
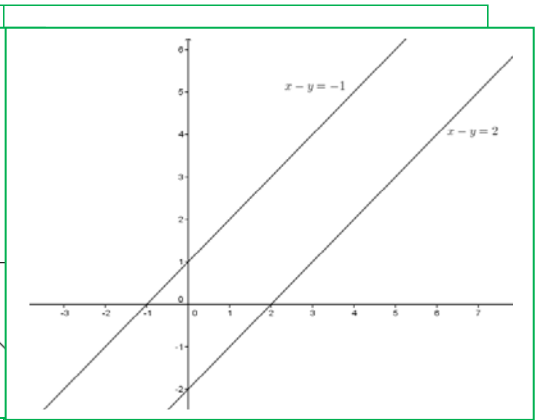
En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada una de las ecuaciones representa una recta en el plano.

Estas rectas pueden estar posicionadas entre sí de tres maneras distintas, lo que nos ayudará a clasificar nuestro sistema en:

1) **Compatible determinado**: el sistema tiene una única solución, por lo que las rectas son **SECANTES**, se cortan en un punto.

2) **Compatible indeterminado**: el sistema tiene infinitas soluciones, por lo que las rectas son **COINCIDENTES.**

3) **Incompatible**: el sistema no tiene solución, por lo que las rectas son **PARALELAS.**

		
Compatible determinado	**Compatible indeterminado**	**Incompatible**
Rectas secantes	**Rectas coincidentes**	**Rectas paralelas**

Actividades resueltas

- Añade una ecuación a $x - 2y = 2$ para que el sistema resultante sea:

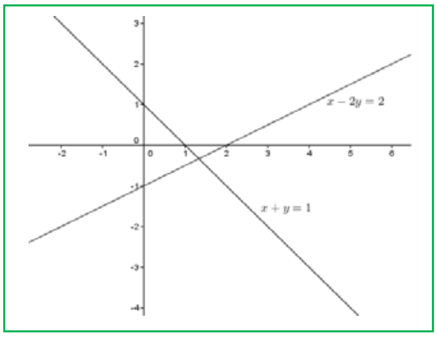
  a) Compatible determinado

  b) Incompatible

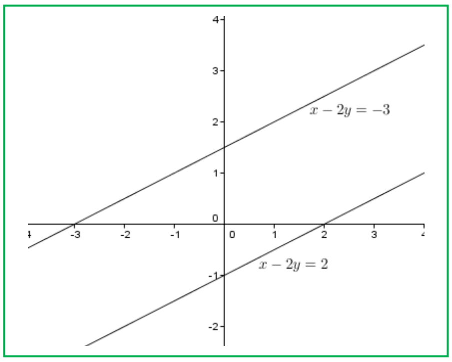
  c) Compatible indeterminado

Solución:

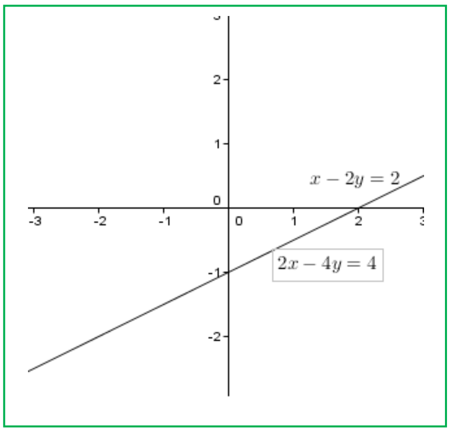
a) Para que el sistema sea compatible determinado, añadiremos una ecuación que no tenga los mismos coeficientes que la que nos dan. Por ejemplo, $x + y = 1$.



b) Para que sea incompatible, los coeficientes de las incógnitas tienen que ser los mismos (o proporcionales) pero tener diferente término independiente. Por ejemplo $x - 2y = -3$, (o $2x - 4y = 0$).



c) Para que sea compatible indeterminado, pondremos una ecuación proporcional a la que tenemos. Por ejemplo $2x - 4y = 4$.



Actividades propuestas

18. Representa los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x+3y=4 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -y+2x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x-6y=6 \end{cases}$

3.3. Resolución de sistemas por el método de sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podemos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, obtenemos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 8:

- Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de sustitución:

Despejamos *x* de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$$

y lo sustituimos en la primera:

$2(3-2y)-3y=-1 \Rightarrow 6-4y-3y=-1 \Rightarrow -4y-3y=-1-6 \Rightarrow -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x = 3-2y \Rightarrow x=3-2\cdot 1=1.$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

19. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x+4y=-7 \\ x-2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$

3.4. Resolución de sistemas por el método de igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema e igualar los resultados obtenidos.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, calculamos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 8:

- Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de igualación:

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3y-1}{2} \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

Igualamos ahora los resultados obtenidos y resolvemos la ecuación resultante:

$$\frac{3y-1}{2} = 3 - 2y \Rightarrow 3y - 1 = 2(3-2y) = 6 - 4y \Rightarrow 3y + 4y = 6 + 1 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot(1) = 1$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

20. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + 3y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

3.5. Resolución de sistemas por el método de reducción

El **método de reducción** consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de *x* o *y* sean iguales pero de signo contrario.

Ejemplo 9:

- Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de reducción:

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 para que los coeficientes de la *x* sean iguales pero de signo contrario y sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ -2x-4y=-6 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$2x-3\cdot 1=-1 \Rightarrow 2x=-1+3=2 \Rightarrow x=2/2=1$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

21. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x-5y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 4x+y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$

4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.1. Resolución de problemas mediante ecuaciones de primer grado

Ya sabes que:

Muchos problemas pueden resolverse mediante una ecuación.

Actividades resueltas

- Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 15.

Para resolverlo vamos a seguir técnicas generales de resolución de problemas:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con mucho cuidado el enunciado, y pregúntate:

¿Qué te piden? ¿Qué datos tienes?

Nos piden un número. La **incógnita** es ese número. Llama a ese número x. Su siguiente, será $x + 1$. Nos dicen que la suma de ambos es 15.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema que queremos resolver mediante una ecuación. Escribe en lenguaje algebraico el enunciado del problema y plantea una ecuación:

$$x + (x + 1) = 15.$$

Pregúntate si efectivamente resuelve el problema releyendo el enunciado.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resuelve la ecuación. Para resolver una ecuación conviene seguir un orden de actuación que nos ayude a no cometer errores, para ello seguimos el procedimiento que acabamos de aprender.

- Quita, si los hay, paréntesis y denominadores: $x + x + 1 = 15$.
- Para poner en el primer miembro los términos con x, y en el segundo los que no lo tienen, **haz lo mismo a los dos lados**, resta 1 a los dos miembros: $x + x + 1 – 1= 15 – 1$, luego $x + x = 15 – 1$. Opera: $2x = 14$. Despeja:
- Para despejar la x, se hace lo mismo a los dos lados, se dividen por 2 ambos miembros:

$$2x/2 = 14/2, \text{ por tanto, } x = 7.$$

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, comprueba que: $7 + 8 = 15$.

Actividades propuestas

22. En un pequeño hotel hay 47 habitaciones simples y dobles. Si en total tiene 57 camas, ¿cuántas habitaciones son simples y cuántas son dobles?

23. En una granja hay 100 animales entre gallinas y conejos, y entre todos los animales suman 280 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

4.2. Resolución de problemas mediante ecuaciones de 2º grado

Para resolver problemas por medio de ecuaciones de 2º grado, del mismo modo que los problemas de ecuaciones de primer grado, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar la incógnita

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear la ecuación y resolverla

5.- Comprobar la solución obtenida

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *¿Cuál es el número natural cuyo quíntuplo aumentado en 6 es igual a su cuadrado?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos la incógnita, que en este caso, es el número que estamos buscando.

2.- Número buscado = x

3.- Traducimos ahora el problema al lenguaje algebraico:

$$5x + 6 = x^2$$

4.- Resolvemos la ecuación:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6; \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solución: Como el enunciado dice "número natural" el número buscado es el 6.

5.- ***Comprobación***: En efecto $5 \cdot 6 + 6 = 36 = 6^2$.

Actividades propuestas

24. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

25. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

26. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?

27. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.

4.3. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar las incógnitas

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear el sistema y resolverlo

5.- Comprobar la solución obtenida

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *La suma de las edades de un padre y su hijo es 39 y su diferencia 25. ¿Cuál es la edad de cada uno?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos las incógnitas que, en este caso, son la edad del padre y el hijo

2.- Edad del padre = x

Edad del hijo = y

3.- Pasamos el enunciado a lenguaje algebraico:

La suma de sus edades es 39:

$$x + y = 39$$

Y su diferencia 25:

$$x - y = 25$$

4.- Planteamos el sistema y lo resolvemos por el método que nos resulte más sencillo. En este caso, lo hacemos por reducción:

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} 2x = 64 \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7$.

Solución: El padre tiene 32 años y el hijo tiene 7 años.

5.- *Comprobación:* En efecto, la suma de las edades es 32 + 7 = 39 y la diferencia es 32 – 7 = 25.

Actividades propuestas

28. La suma de las edades de Raquel y Luis son 65 años. La edad de Luis más cuatro veces la edad de Raquel es igual a 104. ¿Qué edad tienen cada uno?

29. La suma de las edades de María y Alberto es 32 años. Dentro de 8 años, la edad de Alberto será dos veces la edad de María. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?

30. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 123.

CURIOSIDADES. REVISTA

Obtención de la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado.

$ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$

$\Downarrow$

$ax^2 + bx = -c$

$\Downarrow$ Multiplicamos por $4a$

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

$\Downarrow$ Sumamos b^2

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$

$\Downarrow$ Completamos cuadrados

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$\Downarrow$ Hallamos la raíz cuadrada

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Downarrow$Despejamos la x

$2ax = -b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

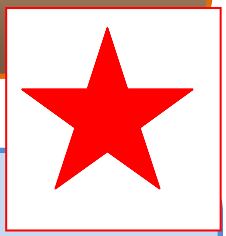
$\Downarrow$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tres ecuaciones de segundo grado interesantes

$x^2 = 2$

Esta ecuación nos aparece al aplicar el Teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles de lados iguales a 1, o al calcular la diagonal de un cuadrado de lado 1. Su solución es la longitud de la hipotenusa o de la diagonal. Tiene de interesante que se demuestra que dicha solución NO es un número racional, un número que pueda escribirse como cociente de dos números enteros.



$x + 1 = x^2$

También se puede escribir como: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ que es una proporción, donde x toma el valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx$ 1,618… que es el número de oro, otro número irracional.

$x^2 = -1$

La tercera ecuación no tiene solución real, ningún número real al elevarlo al cuadrado puede dar un número negativo, pero si ampliamos el campo real con su raíz, $\sqrt{-1}$ = i, resulta que ya todas las ecuaciones de segundo grado tienen solución, y a los números a + b·i se les llama **números complejos**.

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío cuyos trabajos en Álgebra permitieron resolver el problema de la conservación de la energía.

Autora: Raquel Hernández
Revisor: Sergio Hernández y María Molero
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Ecuación de primer grado	Es una ecuación algebraica en la que la mayor potencia de la incógnita es 1.	$-5x + 6 = 0$
Ecuación de segundo grado	Es una ecuación algebraica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ donde *a, b* y *c* son números reales, con $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x + -8 = 0$
Resolución de ecuaciones de 2º grado completas	Se usa la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3, x_2 = 2$
Discriminante	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$
Número de soluciones de una ecuación de 2º grado	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, tiene dos soluciones reales y distintas Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, tiene una solución doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución	$x^2 - 4x - 5 = 0$: $\Delta = 36 > 0$, tiene dos soluciones 5 y -1. $x^2 - 2x + 1 = 0$: $\Delta = 0$, tiene una raíz doble: $x = 1$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. No tiene solución real
Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0$: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 5$.
Suma y producto de raíces	$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3$
Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Clasificación	**Compatible determinado**: Una única solución, el punto de intersección. Las rectas son **secantes**: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**: Infinitas soluciones, por lo que las rectas son **coincidentes**: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: No tiene solución, las rectas son **paralelas**: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Métodos de resolución	**Sustitución:** despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. **Igualación:** despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. **Reducción:** sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Ecuaciones de primer grado

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado

a) $-x - 6x - 8 = 0$ b) $-1 + x = 6$ c) $7x = 70x + 5$

d) $2(x + 3) - (2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + (x - 1) = 5$ f) $12(x - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3) + (x - 1) = -x - 3$ h) $x + 2 = 2x + 168$ i) $6(2x - 3x + 1) - 2x - 1 = -1$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con denominadores:

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x-3}{3} + \frac{-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x-1$ f) $\frac{2x+3x}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

Ecuaciones de segundo grado

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$ b) $x(-1 + x) = 6$ c) $7x^2 = 70x$

d) $2(x + 3) - x(2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$ f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3)\cdot(x - 1) = -x - 3$ h) $x\cdot(x + 2) = 168$ i) $6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x^2-3}{3} + \frac{x^2-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x^2+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x^2}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x^2-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x-1$ f) $\frac{2x+3x^2}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

5. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $x(-1 + x) = 0$ c) $2x^2 = 50$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$ e) $x^2 + 3x - 10 = 0$ f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

6. Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 5, escribe:

$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)\cdot(x - 5) = 0$.

Observa que si el coeficiente de x^2 fuese distinto de 1 los factores tienen que estar multiplicados por dicho coeficiente.

7. Cuando el coeficiente *b* es par ($b = 2B$), puedes simplificar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 6x + 8 = 0$ basta decir $x = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$, luego sus soluciones son 2 y 4.

Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 8x - 12 = 0$ b) $x^2 - 10x + 24 = 0$ c) $x^2 + 4x + 7 = 0$

8. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a) $(x - 2)\cdot(x - 6) = 0$ b) $(x + 1)\cdot(x - 3) = 0$ c) $(x - 9)\cdot(x - 3) = 0$

d) $(x - 1)\cdot(x + 4) = 0$ e) $(x + 7)\cdot(x - 2) = 0$ f) $(x - 4)\cdot(x + 6) = 0$

9. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discrimínate, y luego resuélvelas.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $7x^2 + 12x - 4 = 0$ c) $3x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - x + 5 = 0$ e) $6x^2 - 2x - 3 = 0$ f) $5x^2 + 8x - 6 = 0$

10. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. *Ayuda*: Utiliza el discriminante.

11. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.

12. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.

13. ¿Podrías escribir una ecuación de segundo grado con únicamente una solución real que no fuese doble?

Sistemas lineales de ecuaciones

14. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x-5y=-4 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x+5y=7 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

15. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} -2x+3y=13 \\ 3x-7y=-27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=-3 \\ 4x-y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -8x+3y=-5 \end{cases}$

16. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=14 \\ -x-6y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -7x+5y=-2 \end{cases}$

17. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=4 \\ x-6y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=13 \\ -7x+5y=-9 \end{cases}$

18. Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más apropiado:

a) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3}-\dfrac{2y+2}{5}=-1 \\ \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{4y-1}{3}=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{y+3}{5}=-3 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y+2}{3}=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

19. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado

a) $\begin{cases} (\ )x+3y=(\ ) \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Incompatible

b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$

Su solución sea x = 2 e y = 1

c) $\begin{cases} 3x-y=(\ ) \\ (\ )x+y=7 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$

Su solución sea x = –1 e y = 1

e) $\begin{cases} 3x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+3y=5 \end{cases}$

Compatible indeterminado

f) $\begin{cases} (\ )x+6y=(\ ) \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

20. Escribe tres sistemas lineales que sean incompatibles.

21. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles indeterminados.

22. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles determinados.

23. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=13 \\ x-3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-4y=-12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

Problemas

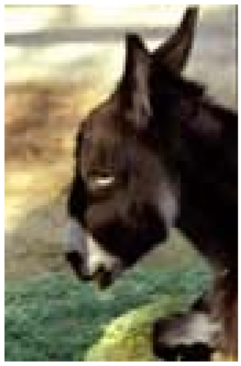
24. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 51 vehículos con un total de 133 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?

25. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado?

26. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6

27. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?

28. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394. Determina dichos números.



29. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

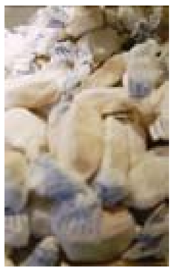
30. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

31. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 365

32. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Mario?

33. Dos números naturales se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son dichos números?

34. La suma de dos números es 5 y su producto es –84. ¿De qué números se trata?



35. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes polvorones. Si los polvorones le cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿Qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?

36. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 7 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 5 cm.

37. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados 17. Calcula dichos números

38. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata?

39. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 100 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?

40. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?

41. En mi clase hay 35 personas. Nos han regalado a cada chica 2 bolígrafos y a cada chico 1 cuaderno. Si en total había 55 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?

42. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

43. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5 €. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8 €. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?

44. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?

45. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

46. En una bolsa hay monedas de 1€ y 2€. Si en total hay 40 monedas y 53€, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la bolsa?

47. En una pelea entre arañas y avispas, hay 70 cabezas y 488 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas avispas y arañas hay en la pelea?

48. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos y chicas hay?

49. Yolanda tiene 6 años más que su hermano Pablo, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿Qué edades tiene?

AUTOEVALUACIÓN

1. Las soluciones de la ecuación $3(x^2 – 1) + 2(x^2 – 2x) = 9$ son:

a) $x = 2$ y $x = 1$ b) $x = 1$ y $x = –3$ c) $x = 1$ y $x = –2/3$ d) $x = 2$ y $x = –6/5$

2. Las soluciones de la ecuación $156 = x(x – 1)$ son:

a) $x = 11$ y $x = –13$ b) $x = 13$ y $x = –12$ c) $x = 10$ y $x = 14$ d) $x = –12$ y $x = –11$

3. Las soluciones de la ecuación $3x^2 –14x + 15 = 0$ son:

a) $x = 2$ y $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ y $x = 4$ c) $x = 1$ y $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ y $x = 3$

4. Las soluciones de la ecuación $(x – 14)^2 + x^2 = (x + 2)^2$ son:

a) $x = 24$ y $x = 8$ b) $x = 21$ y $x = 3$ c) $x = 5$ y $x = 19$ d) $x = 23$ y $x = 2$

5. Las soluciones de la ecuación $2(x + 2) – x(2 – x) = 0$ son:

a) Infinitas b) $x = 9$ y $x = 5$ c) no tiene solución d) $x = 1$ y $x = 4$

6. Las rectas que forman el sistema $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 5x-4y=9 \end{cases}$ son:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Se cruzan

7. La solución del sistema $\begin{cases} 3x-4y=2 \\ 6x-8y=12 \end{cases}$ es:

a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 1$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) No tiene solución

8. La solución del sistema $\begin{cases} 3x+4y=2 \\ 5x-y=11 \end{cases}$ es:

a) $x = 4$ e $y = 2$ b) $x = 3$ e $y = 3$ c) $x = 2$ e $y = –1$ d) $x = 5$ e $y = 1$

9. En una granja, entre pollos y cerdos hay 27 animales y 76 patas. ¿Cuántos pollos y cerdos hay en la granja?

a) 16 pollos y 11 cerdos b) 15 pollos y 12 cerdos c) 13 pollos y 14 cerdos

10. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15, le faltan 100 unidades para llegar a su cuadrado?

a) 16 años b) 17 años c) 20 años d) 18 años