1. Ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas:

a) $$\left.\begin{array}{l} 2x-(1-y)=\dfrac{3}{2} \\ 3-x=\dfrac{3y}{2} \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-(1-y)=\dfrac{3}{2} \\ 3-x=\dfrac{3y}{2} \end{array}\right\} \overset{\substack{\text{quitamos}\\ \text{denominadores}}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} 2x+y=\dfrac{5}{2} \\ -2x-3y=-6 \end{array}\right\} \overset{e_1+e_2}{\Rightarrow} -2y=-\frac{7}{2} \Rightarrow y=\frac{7}{4}$$

Ahora sustituimos en e_1 el valor de y:

$$2x+y=\frac{5}{2} \Rightarrow 2x+\frac{7}{4}=\frac{5}{2} \Rightarrow x=\frac{8}{3}$$

Conclusión: $\boxed{(x,y)=\left(\frac{3}{8},\frac{7}{4}\right)}$

b) $$\left.\begin{array}{l} 2x=\dfrac{x-y}{3} \\ \dfrac{2x-4}{2}-4=\dfrac{1-2y}{2} \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 2x=\dfrac{x-y}{3} \\ \dfrac{2x-4}{2}-4=\dfrac{1-2y}{2} \end{array}\right\} \overset{\substack{\text{Quitamos}\\ \text{denominadores}}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} 6x=x-y \\ 2x-4-8=1-2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x=-y \\ 2x+2y=13 \end{array}\right\}$$

De e_1 despejamos y, llevando el resultado a e_2, de donde obtendremos x:

$y=-5x \Rightarrow 2x+2\cdot(-5x)=13 \Rightarrow x=-\frac{13}{8}$, lo que implica que $y=-5\left(-\frac{13}{8}\right)=\frac{65}{8}$

Conclusión:

$$\boxed{(x,y)=\left(-\frac{13}{8},\frac{65}{8}\right)}$$

2. Ecuaciones de tres ecuaciones con tres incógnitas. Método de Gauss

a) $\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=1 \\ 3x-2=y+z \\ x=3z-4y \end{array}\right\}$

Solución:

Primero ordenamos el sistema y luego hacemos las manipulaciones pertinentes:

$$\left.\begin{array}{l} x+4y-3z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x-y-z=2 \end{array}\right\} \underset{-3e_1+e_3}{\overset{-2e_1+e_2}{\Rightarrow}} \left.\begin{array}{l} x+4y-3z=0 \\ -7y+7z=1 \\ -13y+8z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+4y-3z=0 \\ -y+z=\frac{1}{7} \\ -13y+8z=2 \end{array}\right\} \overset{-8e_2+e_3}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} x+4y-3z=0 \\ -y+z=\frac{1}{7} \\ -5y=\frac{6}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(x,y,z)=\left(\frac{3}{5},-\frac{6}{35},-\frac{1}{35}\right)}$$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x-3y+4x=1 \\ 3x+2y-z=2 \\ 4x+y+3z=4 \end{array}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y+4x=1 \\ 3x+2y-z=2 \\ 4x+y+3z=4 \end{array}\right\} \overset{\frac{1}{2}e_1}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} x-\frac{3}{2}y+2x=\frac{1}{2} \\ 3x+2y-z=2 \\ 4x+y+3z=4 \end{array}\right\} \underset{-4e_1+e_3}{\overset{-3e_1+e_2}{\Rightarrow}} \left.\begin{array}{l} x-\frac{3}{2}y+2x=\frac{1}{2} \\ \frac{13}{2}y-7z=\frac{1}{2} \\ 7y-5z=2 \end{array}\right\} \overset{\frac{2}{13}e_1}{\Rightarrow}$$

$$\overset{\frac{2}{13}e_1}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} x-\frac{3}{2}y+2z=\frac{1}{2} \\ y-\frac{14}{13}z=\frac{1}{13} \\ 7y-5z=2 \end{array}\right\} \overset{-7e_2+e_3}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} x-\frac{3}{2}y+2z=\frac{1}{2} \\ y-\frac{14}{13}z=\frac{1}{13} \\ \frac{33}{13}z=\frac{19}{13} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{23}{33}-2\cdot\frac{19}{33} \\ y=\frac{1}{13}+\frac{14}{13}=\frac{23}{33} \\ z=\frac{19}{33} \end{array}\right.$$

La solución final es: $\boxed{(x,y,z)=\left(\frac{13}{33},\frac{23}{33},\frac{19}{33}\right)}$

3. Sistemas no lineales:

a) $\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 8 \\ x \cdot y = -3 \end{array}\right\}$

Solución:

Representación gráfica del sistema

Despejamos la x de la segunda ecuación y sustituimos en la segunda:

$$x = -\frac{3}{y} \Rightarrow \left(-\frac{3}{y}\right)^2 - y^2 = 8 \Rightarrow y^4 + 8y^2 - 9 = 0$$

En esta ecuación bicuadrada hacemos el cambio $t^2 \equiv y$, lo que implica que:

$$y^4 + 8y^2 - 9 = 0 \Rightarrow t^2 + 8t - 9 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$t^2 + 8t - 9 = 0 \Rightarrow t = \frac{-8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 9}}{2a} = \begin{cases} t_1 = -9 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Ahora deshacemos el cambio:

$$\begin{cases} t_1 = -9 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9}, \text{ que no tiene soluciones en } \mathbb{R} \\ t_2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Sólo hay dos posibles valores de x. Hallamos el valor de y para cada x:

Si x=1, entonces: $y = -\frac{3}{1} = -3$

Si x=-1, entonces: $y = -\frac{3}{(-1)} = 3$

Conclusión:

$\boxed{(x_1, y_1) = (1, -3)}$; $\boxed{(x_2, y_2) = (-1, 3)}$

b) $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{array}\right\}$

Solución:

Lo primero que vamos a hacer es manipular convenientemente la ecuación inferior para escribirla en función de $\frac{1}{x^2}$ y llevarla así a la ecuación superior:

Escribimos como sigue la ecuación inferior:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{y}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1+\frac{2}{y}+\frac{1}{y^2}$$

Ahora la llevamos a la superior:

$$\left(1+\frac{2}{y}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{1}{y^2} = 13 \Rightarrow \frac{1}{y^2}+\frac{y}{y^2} = \frac{6y^2}{y^2} \Rightarrow 6y^2 - y - 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$6y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{125}}{12} = \begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2} \\ y_2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Ahora obtenemos los valores de x:

Si $y_1 = \frac{1}{2}$, entonces, usando la ecuación inferior:

$$\frac{1}{x} = 1+2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Si $y_1 = \frac{1}{2}$, entonces, usando nuevamente la ecuación inferior:

$$\frac{1}{x} = 1-3 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Conclusión:

$$\boxed{(x_1, y_1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)} \quad ; \quad \boxed{(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)}$$

******