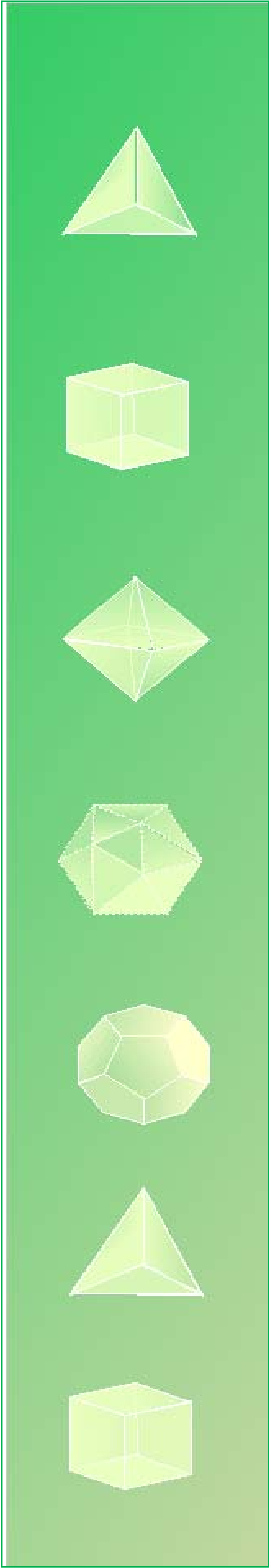


Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas:

4ºA ESO
Capítulo 4:
Ecuaciones y sistemas lineales

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Hernández

Revisores: María Molero y Javier Rodrigo

Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

Ya sabes resolver muchas ecuaciones y sistemas de ecuaciones, y utilizarlo para resolver gran número de problemas de lo más variado. En este capítulo vamos a repasar la resolución de ecuaciones que ya conoces, de primer grado, de segundo… y aprenderemos a resolver algunas nuevas ecuaciones y a utilizar lo aprendido para resolver problemas de la vida cotidiana por medio de las ecuaciones.

Repasaremos también los sistemas de ecuaciones lineales, cómo se resuelven por diferentes métodos y su aplicación para resolver problemas que nos rodean, pero utilizaremos esos métodos para resolver algunos sistemas nuevos que no sean lineales.

Los matemáticos han tardado cerca de tres mil años en comprender y resolver ecuaciones tan sencillas y que tan bien conoces cómo $ax + b = 0$. Ya los egipcios resolvían problemas que se pueden considerar de ecuaciones aunque no existía la notación algebraica. El matemático griego *Diofanto* en el siglo III resolvió ecuaciones de primer y segundo grado. En el siglo XV hubo un desafío para premiar a quien resolviera una ecuación de tercer grado. En el siglo XIX se demostró que no existe una fórmula general que resuelva las ecuaciones de quinto grado.

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

ECUACIONES

1.1. Concepto de ecuación

Una **ecuación** es una igualdad algebraica que únicamente es cierta para algunos valores de las incógnitas. Los valores de las incógnitas que hacen cierta la igualdad son las **soluciones** de la ecuación.

Resolver una ecuación es encontrar sus soluciones, es decir, los valores que al sustituirlos en la ecuación la convierten en una identidad numérica.

Comprobar la solución consiste en sustituirla en la ecuación y ver si la igualdad obtenida es una identidad.

Hay que diferenciar una **ecuación** de una **identidad** algebraica como $x(x + 2) = x^2 + 2x$ que es cierta para todo valor de x.

Las ecuaciones pueden tener una única incógnita, o más de una. Pueden ser polinómicas o de otro tipo (exponencial, racional, irracional…). En las ecuaciones polinómicas los exponentes de las incógnitas son números naturales. Pueden ser de primer grado, si el exponente más alto de la incógnita es uno, de segundo grado si es dos…

Ejemplo:

- La ecuación $(x + 3)^2 = 4x^3$ es una ecuación polinómica de tercer grado con una incógnita.
- La ecuación $7x+\frac{1}{x-2}=0$ es una ecuación racional. No es polinómica.
- La ecuación $7x + sen2x = 0$ no es una ecuación polinómica.
- La ecuación $4xy + 8x = 0$ es polinómica de dos variables.

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

Para resolver ecuaciones vamos sustituyéndola por otra equivalente hasta llegar a la solución. Para obtener ecuaciones equivalentes podemos:

1) Sumar o restar un mismo término a ambos miembros de la ecuación.
2) Multiplicar ambos miembros por un mismo número.
3) Dividir ambos miembros por un mismo número cuidando que ese valor no sea cero.

Ejemplo:

- Para resolver 5x + 3 = 9 la vamos sustituyendo por otras equivalentes:

$5x + 3 = 9 \Rightarrow$ (restamos 3 a ambos miembros de la ecuación)

$5x + 3 – 3 = 9 – 3 \Rightarrow 5x = 6 \Rightarrow$ (dividimos ambos miembros por 5 que es distinto de cero)

$5x/5 = 6/5 \Rightarrow x = 6/5$. Ya conocemos la solución, $x = 6/5$.

Comprobamos si x = 6/5 es la solución sustituyendo en la ecuación:

$5x + 3 = 9 \Rightarrow 5(6/5) + 3 = 9 \Rightarrow 6 + 3 = 9$. En efecto, 6/5 es solución.

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

El **procedimiento** para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, recuerda que es:

1) Eliminar los denominadores
2) Eliminar los paréntesis
3) Agrupar los términos con la incógnita en un miembro y los términos independientes en el otro.
4) Efectuar operaciones
5) Despejar la incógnita.

Ejemplo:

- Resolver: $\mathbf{9(2-3x)+\frac{4}{5}(x-3)=4x-\frac{7-3x}{5}}$

1) Eliminar los denominadores

$9(2-3x)+\frac{4}{5}(x-3)=4x-\frac{7-3x}{5} \Rightarrow \mathbf{5\cdot 9(2-3x)+4(x-3)=5\cdot 4x-(7-3x)} \Rightarrow$

2) Eliminar los paréntesis

$90 - 135x + 4x - 12 = 20x - 7 + 3x \Rightarrow$

3) Agrupar los términos con la incógnita en un miembro y los términos independientes en el otro.

$-135x + 4x - 20x - 3x = -7 - 90 + 12 \Rightarrow$

4) Efectuar operaciones: $-154x = -85 \Rightarrow$
5) Despejar la incógnita: $x = -85/-154 = 85/154$

Actividades propuestas

1. Escribe tres ecuaciones equivalentes a $4x - 5xy + 7 - 2yx = 8x$.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5(7x + 6) = 21$ b) $-2x + 7 = -7(3x - 2) - 8x$ c) $2x - 6(9 + 5x) = 4(x + 6) + 7$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $9(2-3x)+\frac{4}{5}(x-3)=4x-\frac{7-3x}{5}$ b) $6-\left(8-4\left(3x-\frac{3}{7}\right)\right)=2x-\frac{5-9x}{7}$ c) $8(3x-5)=7(6-9x)$

4. Comprueba que la solución de $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}=\frac{1}{6}$ es $x = 6$.

5. Escribe tres ecuaciones de primer grado que tengan como solución 3, otras tres que tengan infinitas soluciones y tres que no tengan solución.

6. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es 30 cm y que su base es doble que su altura.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2(3x + 4) = 7$ b) $-4x + 6 = -9(5x - 1) - 5x$ c) $4x - 7(11 + 2x) = 6(x + 8) + 9$

d) $2(3-4x)+\frac{4}{7}(x-2)=2x-\frac{5-4x}{7}$ e) $2-\left(7-5\left(2x-\frac{1}{3}\right)\right)=4x-\frac{6-2x}{3}$ f) $3(7x-1)=9(3-2x)$

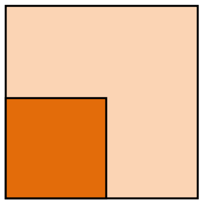
Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Ecuaciones de 2º grado

Hay ecuaciones de segundo grado que ya sabes resolver. En este capítulo vamos a profundizar y a aprender a resolver este tipo de ecuaciones. Por ejemplo, el siguiente problema ya sabes resolverlo:

Actividades resueltas

- Se aumenta el lado de una baldosa cuadrada en 3 cm y su área ha quedado multiplicada por 4, ¿Qué lado tenía la baldosa?



Planteamos la ecuación:

$$(x + 3)^2 = 4x^2$$

¡Esta ecuación si sabes resolverla! $x + 3 = 2x$, luego el lado es de 3 cm.

Hay otra solución, $x = -1$, que no tiene sentido como lado de un cuadrado.

Vamos a repasar de forma ordenada el estudio de estas ecuaciones.

Una **ecuación de segundo grado** es una ecuación polinómica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Las ecuaciones de segundo grado se pueden escribir de la forma:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

donde *a, b* y *c* son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplo:

- Son ecuaciones de 2º grado por ejemplo

$$5x^2 - 8x + 3= 0; \qquad -3x^2 + 9x + -6 = 0; \qquad x^2 - (3/4)x - 2,8 = 0$$

Ejemplo:

- Los coeficientes de las ecuaciones de 2º grado son números reales, por lo tanto pueden ser fracciones o raíces. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0; \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0; \quad -5,8x^2 + 1,7x + -0,02 = 0; \quad \sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0$$

Actividades propuestas

8. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $3,2x^2 - 1,25 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $5xy^2 - 8 = 0$ d) $28 - 6,3x = 0$ f) $\boldsymbol{2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0}$

9. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son *a*, *b* y *c*.
a) $3 - 8x^2 + 10x = 0$ b) $-3,4x^2 + 7,8x = 0$ c) $6x^2 - 1 = 0$ d) $1,25x^2 - 3,47x + 2,75 = 0$.

10. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son *a*, *b* y *c*.

a) $2 -7x^2 + 11x = 0$ b) $-2,3x^2 + 6,7x = 0$

c) $5x^2 - 9 = 0$ d) $9,1x^2 - 2,3x + 1,6= 0$

1.3. Resolución de ecuaciones de 2º grado completas

Se llama **ecuación de segundo grado completa** a aquella que tiene valores distintos de cero para *a*, *b* y *c*.

Para resolver las ecuaciones de segundo grado completas se utiliza la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula nos permite calcular las dos soluciones de la ecuación.

Llamamos **discriminante** a la parte de la fórmula que está en el interior de la raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 - 5x + 6 = 0$

Primero debemos saber quiénes son *a*, *b* y *c:*

$$a = 1;\ b = -5;\ c = 6$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula, obtenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Por lo tanto, las dos soluciones son:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; \qquad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

En efecto, $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, y $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, luego 3 y 2 son soluciones de la ecuación.

Actividades propuestas

11. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ b) $3x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $2x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 3x - 10 = 0$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x - 2\cdot\frac{x-1}{5} = x^2 - \frac{10x+8}{5}$ b) $4\cdot\frac{x-3}{5} - \frac{7-4x}{x} = 8$ c) $x(x-2) + 3(x^2 - 7) + 11 = -11$

d) $6(x^2 - 7) + 2(x^2 - 9) + 3 = 2$ e) $\frac{3-6x^2}{2x} - \frac{1}{3} = \frac{2x-5}{6}$ f) $\frac{1-2x^2}{3x} - \frac{2}{5} = \frac{4x-2}{15}$

1.4. Número de soluciones de una ecuación de 2º grado completa

Antes hemos definido lo que era el **discriminante**, ¿te acuerdas?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para saber cuántas soluciones tiene una ecuación de 2º grado, nos vamos a fijar en el signo del discriminante.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales (una solución doble).

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución.

Ejemplo:

- La ecuación $x^2 - 4x - 12 = 0$ tiene como discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-12) = 16 + 48 = 64 > 0$$

Por lo tanto, la ecuación dada tiene 2 soluciones reales y distintas, 6 y –2. (*Comprobación:* $6^2 - 4\cdot 6 - 12 = 36 - 24 - 12 = 0$ y $(-2)^2 - 4(-2) - 12 = 4 + 8 - 12 = 0$).

- La ecuación $x^2 - 4x + 4 = 0$ tiene como discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales. Se puede escribir como:

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0$, que tiene la solución doble $x = 2$.

- La ecuación $x^2 + 5x + 9 = 0$ tiene como discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4\cdot 1\cdot(9) = 25 - 36 = -11 < 0$$

Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real. Ningún número real verifica la ecuación.

Actividades propuestas

13. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $5x^2 + 2x + 4 = 0$ **b)** $2x^2 - 7x + 8 = 0$

c) $x^2 - 5x - 11 = 0$ **d)** $3x^2 - 8x + 6 = 0$

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

1.5. Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas

Llamamos **ecuación de 2º grado incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que el coeficiente *b* vale 0 (falta *b*), o el coeficiente *c* vale 0 (falta *c*).

Observa: Si el coeficiente *a* vale cero no es una ecuación de segundo grado.

Ejemplo:

- La ecuación de 2º grado $2x^2 - 18 = 0$ es incompleta porque el coeficiente $b = 0$, es decir, falta *b*.
- La ecuación de 2º grado $3x^2 - 15x = 0$ es incompleta porque no tiene *c*, es decir, $c = 0$.

Una ecuación de segundo grado incompleta también se puede resolver utilizando la fórmula de las completas pero es un proceso más lento y es más fácil equivocarse.

Si el coeficiente *b* = 0: Despejamos la incógnita normalmente, como hacíamos en las ecuaciones de primer grado:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow \boldsymbol{x^2 = \frac{-c}{a}} \Rightarrow$$

$\sqrt{\boldsymbol{x^2}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{-c}}{\boldsymbol{a}}} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \pm\sqrt{\frac{\boldsymbol{-c}}{\boldsymbol{a}}}$. Si $\frac{\boldsymbol{-c}}{\boldsymbol{a}} > 0$ tiene dos soluciones distintas, si $\frac{\boldsymbol{-c}}{\boldsymbol{a}} < 0$ no existe solución.

Resumen

Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita:

$$\boldsymbol{x} = \pm\sqrt{\frac{\boldsymbol{-c}}{\boldsymbol{a}}}, \text{ si } c \leq 0.$$

Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, sacamos factor común:

$$x = 0 \text{ y } \boldsymbol{x = \frac{-b}{a}}.$$

Si el coeficiente *c* = 0: Sacamos factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Para que el producto de dos factores valga cero, uno de los factores debe valer cero.

Por tanto $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{-b}{a}}$

Ejemplo:

- En la ecuación $2x^2 - 50 = 0$ falta la *b*. Para resolverla despejamos la incógnita, es decir, x^2:

$$2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 50/2 = 25$$

Una vez que llegamos aquí, nos falta quitar ese cuadrado que lleva nuestra incógnita. Para ello, hacemos la raíz cuadrada en los 2 miembros de la ecuación:

$$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Así hemos obtenido las dos soluciones de nuestra ecuación, 5 y –5. En efecto, $2\cdot5^2 - 50 = 2\cdot25 - 50 = 0$, y $2\cdot(-5)^2 - 50 = 2\cdot25 - 50 = 0$

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- En la ecuación $4x^2 - 24x = 0$ falta la c. Para resolverla, sacamos factor común:

$$4x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 4x(x - 6) = 0$$

Una vez que llegamos aquí, tenemos dos opciones

1) $4x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$.

Así hemos obtenido las dos soluciones de la ecuación $x = 0$ y $x = 6$.

En efecto, $4\cdot0^2 - 24\cdot0 = 0$, y $4\cdot(6)^2 - 24\cdot6 = 4\cdot36 - 24\cdot6 = 144 - 144 = 0$.

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación de 2º grado $3x^2 - 27 = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la b. Por lo tanto, despejamos la incógnita

$3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 27/3 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm3$. Las soluciones son 3 y –3.

- Resuelve la ecuación de 2º grado $x^2 + 8x = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la c.

Por lo tanto, sacamos factor común: $x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x + 8) = 0$

Obtenemos las dos soluciones: $x = 0$ y $x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$. Las soluciones son 0 y –8.

Actividades propuestas

14. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 18x = 0$ b) $5x^2 - 180 = 0$ c) $x^2 - 49 = 0$

d) $2x^2 + x = 0$ e) $4x^2 - 25 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

1.6. Suma y producto de las soluciones en una ecuación de segundo grado

Si en una ecuación de segundo grado: $x^2 + bx + c = 0$, con $a = 1$, conocemos sus soluciones: x_1 y x_2 sabemos que podemos escribir la ecuación de forma factorizada:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Hacemos operaciones:

$$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0,$$

por lo que el coeficiente c es igual al producto de las soluciones y la suma de las soluciones es igual al opuesto del coeficiente b, es decir, $-b$.

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = c; \qquad x_1 + x_2 = -b.}$$

Si la ecuación es $ax^2 + bx + c = 0$, dividiendo por a, ya tenemos una de coeficiente $a = 1$, y obtenemos que:

$$\boldsymbol{x_1\, x_2 = \frac{c}{a}; \qquad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$$

Esta propiedad nos permite, en ocasiones, resolver mentalmente algunas ecuaciones de segundo grado.

Actividades resueltas

- Resuelve mentalmente la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Buscamos, mentalmente dos números cuyo producto sea 6 y cuya suma sea 5. En efecto, $2 \cdot 3 = 6$, y $2 + 3 = 5$, luego las soluciones de la ecuación son 2 y 3.

- Resuelve mentalmente la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$.

El producto debe ser 9. Probamos con 3 como solución, y en efecto $3 + 3 = 6$. Las soluciones son la raíz 3 doble.

- Resuelve mentalmente la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$.

Las soluciones son -1 y 2, pues su producto es -2 y su suma 1.

- Resuelve mentalmente la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$.

Las soluciones son 1 y -2, pues su producto es -2 y su suma -1.

Actividades propuestas

15. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 + 6x = 0$ b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$ d) $x^2 - 9x + 20 = 0$

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 21 = 0$

16. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 3 y 7.

17. El perímetro de un rectángulo mide 16 cm y su área 15 cm^2. Calcula sus dimensiones.

18. Si 3 es una solución de $x^2 - 5x + a = 0$, ¿cuánto vale a?

1.7. Otras ecuaciones

Durante siglos los algebristas han buscado fórmulas, como la que ya conoces de la ecuación de segundo grado, que resolviera las ecuaciones de tercer grado, de cuarto, de quinto… sin éxito a partir del quinto grado. Las fórmulas para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado son complicadas. Sólo sabemos resolver de forma sencilla algunas de estas ecuaciones.

Ejemplo:

- Resuelve: $(x – 2) \cdot (x – 6) \cdot (x + 1) \cdot (x – 3) \cdot (x – 7) = 0$.

Es una ecuación **polinómica** de grado cinco, pero al estar factorizada sabemos resolverla pues para que el producto de varios factores de cero, uno de ellos debe valer cero. Igualando a cero cada factor tenemos que las soluciones son 2, 6, –1, 3 y 7.

Ejemplo:

- La ecuación $x^4 – 5x^2 + 4 = 0$ es una ecuación polinómica de cuarto grado, pero con una forma muy especial. Se llama ecuación **bicuadrada**, porque podemos transformarla en una ecuación de segundo grado llamando a x^2 por ejemplo, z.

$$x^4 – 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 – 5z + 4 = 0 \Rightarrow z = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Una solución de la ecuación de segundo grado es $z = 4$, y la otra es $z = 1$.

Por tanto si $z = x^2 = 4$, entonces $x = 2$ y $x = –2$.

Y si $z = x^2 = 1$, entonces $x = 1$ y $x = –1$.

Nuestra ecuación de cuarto grado tiene cuatro soluciones: 2, –2, 1 y –1.

Ejemplo:

Si hay incógnitas en el denominador, la ecuación se denomina **racional**, y se resuelve de forma similar, quitando denominadores.

- Resuelve $\frac{3x-8+9x}{2x} = 4$

Quitamos denominadores: $\frac{3x-8+9x}{2x} = 4 \Rightarrow 3x – 8 + 9x = 8x \Rightarrow 3x + 9x – 8x = 8 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$.

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

Si hay incógnitas dentro de un radical, la ecuación se denomina **irracional**, y se resuelve aislando el radical y elevando al cuadrado (o al índice del radical). Ahora es preciso tener una precaución, al elevar al cuadrado, la ecuación obtenida no es equivalente, se pueden haber añadido soluciones.

- Resuelve $2+\sqrt{x-3}=x-1$

Se aísla el radical: $2+\sqrt{x-3}=x-1 \Rightarrow \sqrt{x-3}=x-1-2 \Rightarrow \sqrt{x-3}=x-3$

Elevamos al cuadrado: $(\sqrt{x-3})^2=(x-3)^2 \Rightarrow x-3=x^2-6x+9 \Rightarrow x^2-7x+12=0$.

Resolvemos la ecuación de segundo grado que tiene por soluciones 4 y 3, y comprobando en la ecuación inicial, ambas son soluciones de esta ecuación.

Ejemplo:

Si la incógnita está en un exponente la ecuación se denomina **exponencial**. Si podemos expresar los dos miembros de la ecuación como potencias de la misma base, se igualan los exponentes.

- Resuelve: $3^{2x}=\dfrac{1}{81}$

Expresamos la ecuación como potencias de una misma base: $3^{2x}=\dfrac{1}{81} \Rightarrow 3^{2x}=3^{-4}$

Igualamos los exponentes: $2x=-4 \Rightarrow x=-2$.

Actividades propuestas

19. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x-6)\cdot(x-3)\cdot(x+7)\cdot(x-1)\cdot(x-9)=0$ b) $3(x-4)\cdot(x-8)\cdot(x+5)\cdot(x-2)\cdot(x-1)=0$

20. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4-13x^2+36=0$ b) $x^4-29x^2+100=0$ c) $x^4-10x^2+9=0$ d) $x^4-26x^2+25=0$

21. Resuelve las ecuaciones racionales siguientes:

a) $\dfrac{2x-1+7x}{3x}=\dfrac{3}{x}-2$ b) $\dfrac{1}{x}+1-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{4}{3}$ d) $\dfrac{2x-3}{x}+\dfrac{1}{x}=1$

22. Resuelve las ecuaciones irracionales siguientes:

a) $5+\sqrt{x-1}=x+2$ b) $\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-2}=x+1$ c) $\sqrt{x}-4=x-1$ d) $7+\sqrt{x+4}=x+9$

23. Resuelve las ecuaciones exponenciales siguientes:

a) $2^{x+5}\cdot 2^{x+4}\cdot 2^{x+3}=8$ b) $5^{3x}=\dfrac{1}{625}$ c) $2^{2x}\cdot 4^{x}=\dfrac{1}{16}$

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

2. SISTEMAS DE ECUACIONES

2.1. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

Una ecuación con varias incógnitas es una igualdad que las relaciona.

Por ejemplo:

- $x^2 + y^2 = 36$, es la ecuación de una circunferencia de centro el origen y radio 6.

Un **sistema de ecuaciones** es, por tanto, un conjunto de ecuaciones con varias incógnitas.

- ***Por ejemplo:*** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

La primera ecuación es la de una circunferencia de centro el origen y radio 6, y la segunda es la ecuación de una recta que pasa por el origen. Las soluciones del sistema son los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta.

Se llama **solución del sistema** a cada uno de los conjuntos de números que verifican todas las ecuaciones del sistema.

Dos sistemas son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas está formado por ecuaciones de primer grado y se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax + by = c} \\ \boldsymbol{a'x + b'y = c'} \end{cases}$$

donde *a, b, a'* y *b'* son números reales que se denominan **coeficientes** y *c* y *c'* también son números reales llamados **términos independientes**.
La **solución** del sistema es un par de valores (*x*, *y*) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Ejemplo:

- Son sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo:
  $\begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 7x + 9y = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} 6x + 3y = 7 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 8x - 4y = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} 5y + 3 = 4x \\ 8x - 4 = 6y \end{cases}$

Ejemplo:

- **No** es un sistema lineal $\begin{cases} 4xy + 6y = 1 \\ 5x - 7xy = 3 \end{cases}$ porque tiene términos en *xy*, aunque es un sistema de dos ecuaciones.
- Tampoco lo es $\begin{cases} 4x^2 + 6y = 5 \\ 3x - 7y = 8 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2, aunque es un sistema de dos ecuaciones.

Actividades propuestas

24. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3xy + y = 5 \\ 5x - 4y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6y - 4x = 3 \\ x - 7y = -8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 3 = 2y \\ 4x + 6y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

2.2. Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

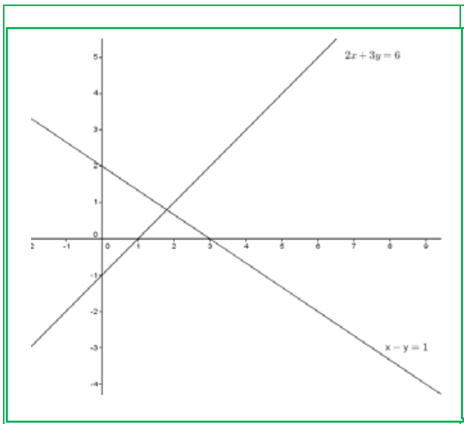
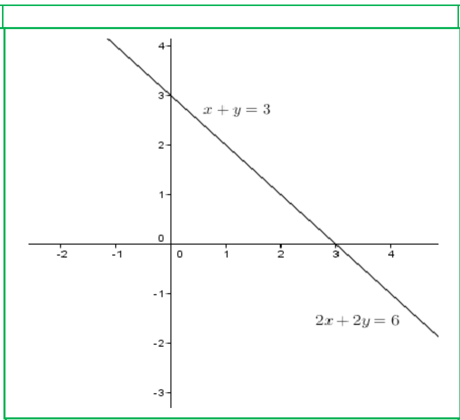
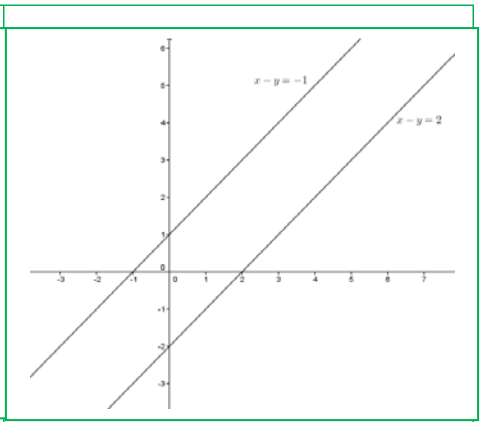
En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada una de las ecuaciones representa una recta en el plano.

Estas rectas pueden estar posicionadas entre sí de tres maneras distintas, lo que nos ayudará a clasificar nuestro sistema en:

1) **Compatible determinado**: el sistema tiene una única solución, por lo que las rectas son **SECANTES**, se cortan en un único punto.

2) **Compatible indeterminado**: el sistema tiene infinitas soluciones, por lo que las rectas son **COINCIDENTES.**

3) **Incompatible**: el sistema no tiene solución, por lo que las rectas son **PARALELAS.**

		
Compatible determinado	**Compatible indeterminado**	**Incompatible**
Rectas secantes	**Rectas coincidentes**	**Rectas paralelas**

Actividades resueltas

- Añade una ecuación a $x - 2y = 2$ para que el sistema resultante sea:

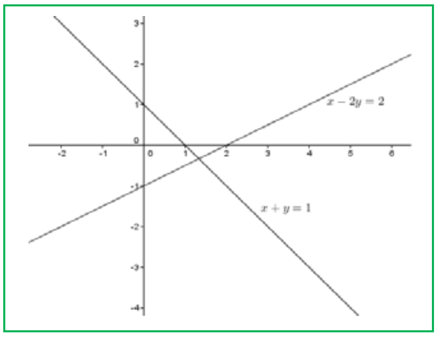
  a) Compatible determinado

  b) Incompatible

  c) Compatible indeterminado

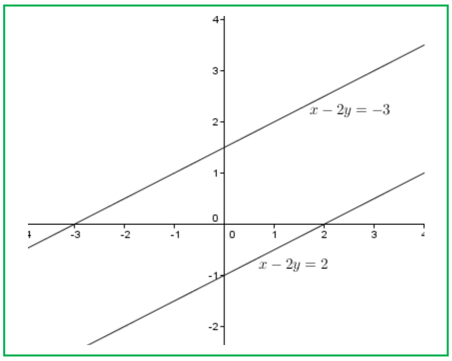
Solución:

a) Para que el sistema sea compatible determinado, añadiremos una ecuación que no tenga los mismos coeficientes que la que nos dan. Por ejemplo, $x + y = 1$.

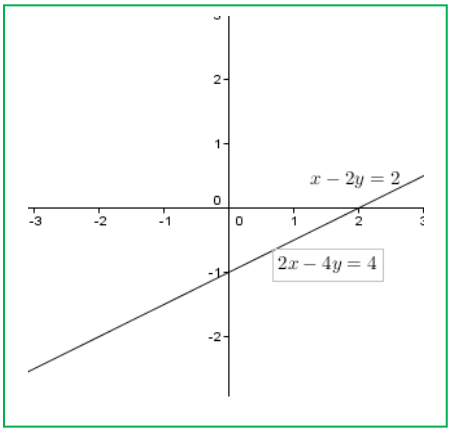


Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

b) Para que sea incompatible, los coeficientes de las incógnitas tienen que ser los mismos (o proporcionales) pero tener diferente término independiente. Por ejemplo $x - 2y = -3$, (o $2x - 4y = 0$).



c) Para que sea compatible indeterminado, pondremos una ecuación proporcional a la que tenemos. Por ejemplo $2x - 4y = 4$.



Una forma de resolver un sistema lineal de dos ecuaciones es el de **resolución gráfica**, representando, como hemos visto en el ejemplo anterior, las dos rectas definidas por las ecuaciones del sistema en los mismos ejes coordenados, clasificando el sistema y si es compatible y determinado, determinando el punto de intersección.

Actividades propuestas

25. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$

26. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -3x + y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

27. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Inventa un enunciado que resuelva dicho sistema

2.3. Resolución de sistemas lineales por el método de sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podemos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, obtenemos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

- Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de sustitución:

Despejamos *x* de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

y lo sustituimos en la primera:

$2(3 - 2y) - 3y = -1 \Rightarrow 6 - 4y - 3y = -1 \Rightarrow -4y - 3y = -1 - 6 \Rightarrow -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot 1 = 1$.

Solución:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 1} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases}$$

Actividades propuestas

28. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 26 \\ 3x + y = 24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$

2.4. Resolución de sistemas lineales por el método de igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema e igualar los resultados obtenidos.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, calculamos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

- Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de igualación:

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3y - 1}{2} \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

Igualamos ahora los resultados obtenidos y resolvemos la ecuación resultante:

$$\frac{3y-1}{2} = 3 - 2y \Rightarrow 3y - 1 = 2(3 - 2y) = 6 - 4y \Rightarrow 3y + 4y = 6 + 1 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot(1) = 1$

Solución:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 1} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases}$$

Actividades propuestas

29. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x + y = 18 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 4x + 2y = 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

2.5. Resolución de sistemas lineales por el método de reducción

El **método de reducción** consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de *x* o *y* sean iguales pero de signo contrario.

Ejemplo:

- Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de reducción:

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 para que los coeficientes de la *x* sean iguales pero de signo contrario y sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -2x - 4y = -6 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 0 - 7y = -7 \end{cases} \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$2x - 3\cdot 1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$

Solución:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 1} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases}$$

Actividades propuestas

30. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 2x - 5y = -23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$

2.6. Sistemas de ecuaciones no lineales

Si alguna de las ecuaciones del sistema **no** es lineal, el sistema ya no es lineal.

Se resuelve por cualquiera de los métodos anteriores, por ejemplo por sustitución, despejando, si es posible una incógnita de exponente uno.

Ejemplo:

- Para resolver $\begin{cases} x + y = 14 \\ xy = -15 \end{cases}$ despejamos "*y*" de la primera ecuación: *y* = 14 – *x*, y lo sustituimos en la segunda: $xy = x(14 - x) = -15 \Rightarrow 14x - x^2 = -15 \Rightarrow x^2 - 14x - 15 = 0$.

Resolvemos la ecuación de segundo grado, y las soluciones son: 15 y –1.

Como *y* = 14 – *x*, si *x* = 15 entonces *y* = –1, y si *x* = –1 entonces *y* = 15.

Las soluciones son los puntos (15, –1) y (–1, 15), puntos de intersección entre la hipérbola *xy* = 15, y la recta *x* + *y* = 14.

Actividades propuestas

31. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ 5x^2 - 2y^2 = 5 \end{cases}$ *Ayuda*: Utiliza el método de reducción:

c) $\begin{cases} xy = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - 4y = -3 \\ xy = 1 \end{cases}$ e) $\left.\begin{matrix} x + y - \dfrac{y}{x} = 1 \\ x + y = 2 \end{matrix}\right\}$

32. La trayectoria de un proyectil es una parábola de ecuación: $y = -x^2 + 5x$, y la trayectoria de un avión es una recta de ecuación: *y* = 3*x*. ¿En qué puntos coinciden ambas trayectorias? Representa gráficamente la recta y la parábola para comprobar el resultado.

33. Resuelve los siguientes sistemas y comprueba gráficamente las soluciones:

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$ c) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{matrix}\right\}$

d) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x + y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ f) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 18 \\ y = x \end{matrix}\right\}$

2.7. Sistemas de ecuaciones lineales de más de dos incógnitas

La mejor forma de resolver sistemas lineales de más de dos incógnitas es ir sustituyendo el sistema por otro equivalente de forma que cada vez se consiga que sean ceros los coeficientes de más incógnitas.

Ejemplo:

- Para resolver el sistema: $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases}$, dejamos la primera ecuación sin modificar. Queremos que la segunda ecuación tenga un cero como coeficiente de la "*x*", para ello la multiplicamos por 2 y le restamos la primera. Para que la tercera ecuación tenga un cero como coeficiente de la "*x*", la multiplicamos por 2 y le restamos la primera:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases}$$

Ahora podemos resolver el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas formado por las dos últimas ecuaciones, o continuar con nuestro procedimiento. Para conseguir que en la tercera ecuación el coeficiente de la "*y*" sea un cero multiplicamos la tercera ecuación por 3 y la segunda por 7 y las restamos:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 0 + 32z = 32 \end{cases}$$

y ahora ya podemos despejar cada una de las incógnitas de forma ordenada:

$$\begin{cases} z = 1 \\ 3y + 5(1) = 8 \\ 2x + y - 3(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

34. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ 3x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x - 2y - 3z = -6 \end{cases}$

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1. Resolución de problemas mediante ecuaciones de 2º grado

Para resolver problemas por medio de ecuaciones de 2º grado, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar la incógnita

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear la ecuación y resolverla

5.- Comprobar la solución obtenida

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *¿Cuál es el número natural cuyo quíntuplo aumentado en 6 unidades es igual a su cuadrado?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos la incógnita, que en este caso, es el número que estamos buscando.

2.- Número buscado = x

3.- Traducimos ahora el problema al lenguaje algebraico:

$$5x + 6 = x^2$$

4.- Resolvemos la ecuación:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6; \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solución: Como el enunciado dice “número natural” el número buscado es el 6.

5.- *Comprobación*: En efecto 5·6 + 6 = 36 = 6^2.

Actividades propuestas

35. ¿Qué número multiplicado por 4 es 5 unidades menor que su cuadrado?

36. En una clase deciden que todos van a enviar una carta al resto de compañeros. Uno dice: ¡Vamos a escribir 380 cartas! Calcula el número de alumnos que hay en la clase.

37. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

38. Una fotografía rectangular mide 14 cm de base y 10 cm de altura. Alrededor de la foto hay un margen de igual anchura para la base que para la altura. Halla el ancho del margen, sabiendo que el área total de la foto y el margen es de 252 cm^2.

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

39. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?

40. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.

41. Una hoja de papel cuadrada se dobla por la mitad. El rectángulo resultante tiene un área de 8 cm^2. ¿Cuál es perímetro de dicho rectángulo?

42. Un padre dice: "El producto de la edad de mi hijo hace 5 años por el de su edad hace 3 años es mi edad actual, que son 35 años". Calcula la edad del hijo.

43. Halla las dimensiones de rectángulo cuya área es 21 m^2, sabiendo que sus lados se diferencian en 4 metros.

44. En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 4 cm menos que la hipotenusa y 4 cm más que el otro cateto. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

45. Halla dos números pares consecutivos cuyo producto sea 224.

46. Halla tres números impares consecutivos tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos se obtiene como resultado 15.

3.2. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar las incógnitas

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear el sistema y resolverlo

5.- Comprobar la solución obtenida

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *La suma de las edades de un padre y su hijo es 39 y su diferencia 25. ¿Cuál es la edad de cada uno?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos las incógnitas que, en este caso, son la edad del padre y el hijo

2.- Edad del padre = x

Edad del hijo = y

3.- Pasamos el enunciado a lenguaje algebraico:

La suma de sus edades es 39:

$$x + y = 39$$

Y su diferencia 25:

$$x - y = 25$$

4.- Planteamos el sistema y lo resolvemos por el método que nos resulte más sencillo. En este caso, lo hacemos por reducción:

$$\begin{cases} x+y=39 \\ x-y=25 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} \begin{cases} x+y=39 \\ 2x+0=64 \end{cases} \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7$.

Solución: El padre tiene 32 años y el hijo tiene 7 años.

5.- *Comprobación:* En efecto, la suma de las edades es 32 + 7 = 39 y la diferencia es 32 – 7 = 25.

Actividades propuestas

47. La suma de las edades de María y Alfonso son 65 años. La edad de Alfonso menos la mitad de la edad de María es igual a 35. ¿Qué edad tienen cada uno?

48. La suma de las edades de Mariló y Javier es 32 años. Dentro de 7 años, la edad de Javier será igual a la edad de Mariló más 20 años. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?

49. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 104.

50. Un hotel tiene 42 habitaciones (individuales y dobles) y 62 camas, ¿cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

51. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 cm y las longitudes de sus dos catetos suman 14 cm. Calcula el área del triángulo.

52. Nieves le pregunta a Miriam por sus calificaciones en Matemáticas y en Lengua. Miriam le dice "La suma de mis calificaciones es 19 y el producto 90". Nieves le da la enhorabuena. ¿Qué calificaciones obtuvo?

53. De un número de tres cifras se sabe que suman 12, que la suma de sus cuadrados es 61, y que la cifra de las decenas es igual a la de las centenas más 1. ¿Qué número es?

54. Se tienen tres zumos compuestos del siguiente modo:

El primero de 40 dl de naranja, 50 dl de limón y 90 dl de pomelo.

El segundo de 30 dl de naranja, 30 dl de limón y 50 dl de pomelo.

El tercero de 20 dl de naranja, 40 dl de limón y 40 dl de pomelo.

Se pide qué volumen habrá de tomarse de cada uno de los zumos anteriores para formar un nuevo zumo de 34 dl de naranja, 46 dl de limón y 67 dl de pomelo.

55. Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo. Cada kg de trigo se vende por 2 €, el de la cebada por 1 € y el de mijo por 0,5 €. Si se vende 200 kg en total y se obtiene por la venta 300 €, ¿cuántos volúmenes de cada cereal se han vendido?

56. Se desea mezclar harina de 2 €/kg con harina de 1 €/kg para obtener una mezcla de 1,2 €/kg. ¿Cuántos kg deberemos poner de cada precio para obtener 300 kg de mezcla?

57. En una tienda hay dos tipos de juguetes, los de tipo A que utilizan 2 pilas y los de tipo B que utilizan 5 pilas. Si en total en la tienda hay 30 juguetes y 120 pilas, ¿cuántos juguetes hay de cada tipo?

58. Un peatón sale de una ciudad A y se dirige a una ciudad B que está a 15 km de distancia a una velocidad de 4 km/h, y en el mismo momento sale un ciclista de la ciudad B a una velocidad de 16 km/h y se dirige hacia A, ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de B se cruzan?

CURIOSIDADES. REVISTA

Obtención de la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado.

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$\Downarrow \text{ Multiplicamos por } 4a$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

$$\Downarrow \text{ Sumamos } b^2$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

$$\Downarrow \text{ Completamos cuadrados}$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$\Downarrow \text{ Hallamos la raíz cuadrada}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Downarrow \text{Despejamos la } x$$

$$2ax = -b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tres ecuaciones de segundo grado interesantes

$x^2 = 2$

Esta ecuación nos aparece al aplicar el Teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles de lados iguales a 1, o al calcular la diagonal de un cuadrado de lado 1. Su solución es la longitud de la hipotenusa o de la diagonal. Tiene de interesante que se demuestra que dicha solución NO es un número racional, un número que pueda escribirse como cociente de dos números enteros.

$x + 1 = x^2$

También se puede escribir como: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ que es una proporción, donde x toma el valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\ldots$ que es el número de oro, otro número irracional.

$x^2 = -1$

La tercera ecuación no tiene solución real, ningún número real al elevarlo al cuadrado puede dar un número negativo, pero si ampliamos el campo real con su raíz, $\sqrt{-1} = i$, resulta que ya todas las ecuaciones de segundo grado tienen solución, y a los números $a + b\cdot i$ se les llama **números complejos**.

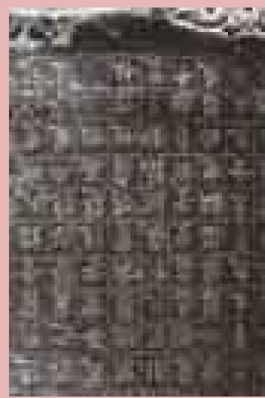
Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío cuyos trabajos en Álgebra permitieron resolver el problema de la conservación de la energía.

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

Los matemáticos han tardado cerca de tres mil años en comprender y resolver ecuaciones tan sencillas y que tan bien conoces como $ax + b = 0$. Ya los **egipcios** en el papiro del *Rhid* (1650 aC) y en el de *Moscú* (1850 aC) resuelven algunos problemas que se podrían considerar de ecuaciones, como por ejemplo: "*Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24*".

En **Mesopotamia** y **Babilonia** ya se sabían resolver sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas y ecuaciones de segundo grado.
Un problema que aparece en una tablilla es: "*La cuarta parte de la anchura más una longitud es igual a 7 manos. Y longitud más anchura es igual a 10 manos*". En este problema "longitud" y "anchura" son incógnitas no relacionadas con estas medidas.

En China en el siglo III a C se editó "*El arte matemático*" donde utilizaban el ábaco y se resolvían ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas.
Uno de los problemas resueltos puede considerarse como la resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando el método matricial.



En Grecia, en el siglo III Diofanto de Alejandría publicó "*Aritmética*" trabajó con ecuaciones y utilizó la primera letra de la palabra griega "*arithmos*" que significa número, para representar a la incógnita.

En su tumba aparece este problema:

"Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto. Es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su juventud ocupó su sexta parte, después durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer vello. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole durante cuatro años".

En el siglo VII los **hindúes** conocían procedimientos algebraicos y trabajaban con eficacia los números.

En el siglo IX el matemático musulmán **Al-Jwarizmi** trabajó sobre procedimientos algebraicos.

En 1489 se inventaron los símbolos + y –.
En 1525 el símbolo de la raíz cuadrada.
En 1557 el símbolo **=**.
En 1591 François Viète representaba las incógnitas con vocales y las constantes con consonantes.
En 1637 René Descartes inventó la geometría analítica con la notación que hoy usamos de x, y z… para las incógnitas y *a, b, c*… para las constantes.

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Ecuación de primer grado	Quitar denominadores Quitar paréntesis Transponer términos Simplificar y despejar	$5/3x + 3(x + 1) = 2 \Rightarrow$ $5/3x + 3x + 3 = 2 \Rightarrow$ $5x + 9x + 9 = 6 \Rightarrow$ $14x = -3 \Rightarrow x = -3/14$.
Ecuación de segundo grado	Tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ Se usa la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3, x_2 = 2$
Número de soluciones de una ecuación de 2º grado	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, tiene dos soluciones reales y distintas Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, tiene una solución doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución	$x^2 - 4x - 5 = 0$: $\Delta = 36 > 0$, tiene dos soluciones 5 y -1. $x^2 - 2x + 1 = 0$: $\Delta = 0$, tiene una raíz doble: $x = 1$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. No tiene solución real
Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ y $x = \dfrac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow$ $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 5$.
Suma y producto de raíces	$x_1\, x_2 = \dfrac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3$
Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Clasificación	**Compatible determinado**: Una única solución, el punto de intersección. Las rectas son **secantes**: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**: Infinitas soluciones, por lo que las rectas son **coincidentes:** $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: No tiene solución, las rectas son **paralelas:** $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Métodos de resolución	**Sustitución:** despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. **Igualación:** despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. **Reducción:** sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados.	

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ecuaciones

1. Resuelve estas ecuaciones:

a) $4(3-2x)+\frac{5}{7}(6x-2)=2x-\frac{1-9x}{7}$ b) $4-\left(3-5\left(2x-\frac{1}{6}\right)\right)=3x-\frac{4-5x}{3}$ c) $4(2x-5)=6(9-4x)$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-3x^2 - 5x - 2 = 0$ b) $2x(-3 + x) = 5$ c) $3x^2 = 27x$

d) $5(3x + 2) - 4x(x + 6) = 3$ e) $4(x - 9) + 2x(2x - 3) = 6$ f) $10(2x^2 - 2) - 5(3 + 2x) = -21$

g) $4(x + 5)\cdot(x - 1) = -2x - 4$ h) $3x\cdot(5x + 1) = 99$ i) $2(3x^2 - 4x + 2) - 2x(3x - 2) = -5$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2-1}{3}-\frac{x+1}{2}=1$ b) $\frac{x^2-3}{5}+\frac{x^2-4x+1}{5}=2$ c) $\frac{2x^2+3}{3}+\frac{x+5}{6}=2$

d) $\frac{1-x^2}{3}+\frac{4x-1}{2}=\frac{1}{6}$ e) $\frac{x^2-3}{2}-\frac{3x-7}{4}=2x-5$ f) $\frac{3x+2x^2}{5}-\frac{4x-7}{10}=2$

4. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$ b) $x^2 + 3x - 10 = 0$ c) $x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ e) $x(-1 + x) = 0$ f) $2x^2 = 50$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

5. Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 5, escribe:

$2x^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow 2(x + 5)\cdot(x - 5) = 0$.

Observa que si el coeficiente de x^2 fuese distinto de 1 los factores tienen que estar multiplicados por dicho coeficiente.

6. Cuando el coeficiente b es par ($b = 2B$), puedes simplificar la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm\sqrt{4B^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm2\sqrt{B^2-ac}}{2a}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 6x + 8 = 0$ basta decir $x=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1$, luego sus soluciones son 2 y 4.

Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 10x + 24 = 0$ b) $x^2 - 6x - 7 = 0$ c) $x^2 + 4x - 5 = 0$

Autora: Raquel Hernández
Revisores: María Molero y Javier Rodrigo
Ilustraciones: Raquel Hernández y Banco de Imágenes de INTEF

7. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a) $(x-3)\cdot(x-7)=0$ b) $(x+2)\cdot(x-4)=0$ c) $(x-8)\cdot(x-4)=0$

d) $(x-2)\cdot(x+5)=0$ e) $(x+6)\cdot(x-3)=0$ f) $(x-5)\cdot(x+3)=0$

8. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discriminante, y luego resuélvelas.

a) $x^2+5x-2=0$ b) $5x^2+2x-4=0$ c) $2x^2+4x+11=0$

d) $2x^2-3x+8=0$ e) $3x^2-x-5=0$ f) $4x^2+2x-7=0$

9. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. *Ayuda*: Utiliza el discriminante.

10. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.

11. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.

12. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^5-37x^3+36x=0$ b) $x^3-2x^2-8x=0$ c) $2x^3+2x^2-12x=0$

d) $x^4-5x^2+6=0$ e) $2x^4=32x^2-96$ f) $x(x-3)(2x+3)(3x-5)=0$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando un cambio de variable:

a) $x^8+81=82x^4$ b) $x^4-24x^2+144=0$ c) $x^6-7x^3-8=0$ d) $x^4+8x^2-9=0$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $2x+\dfrac{3}{x}=5$ b) $\dfrac{3}{5x}+\dfrac{1}{2x}=x$ c) $\dfrac{1}{x-3}+2=\dfrac{5}{x-3}$ d) $\dfrac{2x}{3-2x}-5x=1$

e) $\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{3(2x+1)}{x-1}+3$ f) $\dfrac{2x-3}{x+1}-\dfrac{4+5x}{x}=7$ g) $\dfrac{3x-2}{x+1}-\dfrac{2+3x}{x-1}=4$

h) $\dfrac{3}{1-x}=\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x-x^2}$ i) $\dfrac{3x}{x-2}-\dfrac{5x}{x^2-4}=\dfrac{3x}{2}$ j) $\dfrac{1}{2}=\dfrac{x-5}{3-4x}$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $x=-3+\sqrt{5+2x^2}$ b) $\sqrt{25-x}=x-5$ c) $7+\sqrt{x^2-3x+2}=3x$

d) $\sqrt{x}-\sqrt{x-2}=1$ e) $\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}+1=0$ f) $\sqrt{x}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}=5$

g) $3\sqrt{x-2}-4=\dfrac{-2}{\sqrt{x+1}}$ h) $\sqrt{x-1}-\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}=1$ i) $\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}=4$

16. Resuelve las ecuaciones siguientes: a) $3^{3x}=\dfrac{1}{81}$ b) $5^{2x}=\dfrac{1}{625}$

Sistemas

17. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 4x-3y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+4y=6 \\ 2x+5y=9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ x+y=4 \end{cases}$

18. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} -3x+2y=-1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 4x-y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=10 \\ -8x+3y=-13 \end{cases}$

19. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 7x-2y=5 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ -x-6y=-14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-6y=0 \\ -7x+5y=-9 \end{cases}$

20. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=5 \\ x-7y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ -7x+5y=3 \end{cases}$

21. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{3}-\dfrac{y-1}{5}=-1 \\ \dfrac{2x+3}{2}+\dfrac{3y-1}{4}=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2y+3}{5}=-3 \\ 5x+2y=-10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{2}+\dfrac{3y-2}{3}=2 \\ 7x-y=1 \end{cases}$

22. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado — Incompatible — Su solución sea $x = 2$ e $y = 1$

a) $\begin{cases} (\ )x+3y=(\ ) \\ 2x-y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=(\ ) \\ (\ )x+y=7 \end{cases}$

Incompatible — Su solución sea $x = -1$ e $y = 1$ — Compatible indeterminado

d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+3y=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (\ )x+6y=(\ ) \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

23. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=13 \\ x-3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-4y=-12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

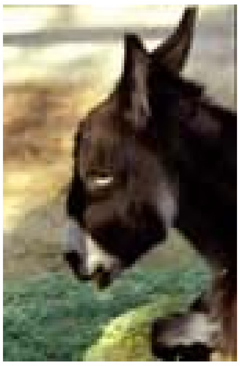
Problemas

24. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 51 vehículos con un total de 133 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?

25. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado?

26. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6.

27. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?



28. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394. Determina dichos números.

29. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

30. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

31. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 365.

32. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Mario?

33. Dos números naturales se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son dichos números?

34. La suma de dos números es 5 y su producto es –84. ¿De qué números se trata?

35. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes y polvorones. Si los polvorones le cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿Qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?

36. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 7 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 5 cm.

37. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados 17. Calcula dichos números

38. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata?

39. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 100 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?

40. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?

41. En mi clase hay 35 personas. Nos han regalado a cada chica 2 bolígrafos y a cada chico 1 cuaderno. Si en total había 55 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?

42. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

43. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5€. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8€. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?

44. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?

45. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

46. En una bolsa hay monedas de 1 € y 2 €. Si en total hay 40 monedas y 53 €, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la bolsa?

47. En una pelea entre arañas y avispas, hay 70 cabezas y 488 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas avispas y arañas hay en la pelea?

48. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos y chicas hay?

49. Yolanda tiene 6 años más que su hermano Pablo, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿Qué edades tienen?

50. Se mezclan 15 kg de maíz de 2,1 € el kilogramo con 27 kg de maíz de precio desconocido, resultando el precio de la mezcla de 3 € el kg. ¿Qué precio tenía el segundo maíz?

51. La altura de un trapecio isósceles es de 4 cm, el perímetro, 24 cm, y los lados inclinados son iguales a la base menor. Calcula el área del trapecio.

52. Dos autobuses salen, uno desde Madrid y el otro desde Valencia (que está a 350 km de Madrid) a las 8 de la mañana. Uno va a 100 km/h y el otro a 120 km/h. ¿A qué hora se cruzan? ¿Cuántos km han recorrido cada uno?

53. En un concurso se ganan 50 euros por cada respuesta acertada y se pierden 100 por cada fallo. Después de 20 preguntas, Pilar lleva ganados 250 euros. ¿Cuántas preguntas ha acertado?

54. Juan ha comprado 6 zumos y 4 batidos por 4,6 €, luego ha comprado 4 zumos y 7 batidos y le han costado 4,8 €. Calcula los precios de ambas cosas.

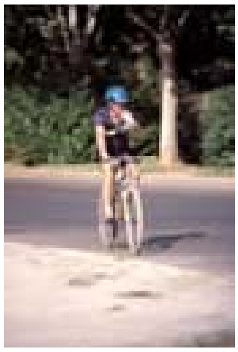
55. ¿Qué fracción es igual a 1 cuando se suma 1 al numerador y es igual a $\frac{1}{2}$ cuando se suma 2 al denominador?

56. El cociente de una división es **3** y el resto es **2**. Si el divisor disminuye en 1 unidad, el cociente aumenta en **2** y el resto nuevo es 1. Hallar el dividendo y el divisor.

57. Dos amigas fueron a pescar. Al final del día una dijo: “Si tú me das uno de tus peces, entonces yo tendré el doble que tú”. La otra le respondió: “Si tú me das uno de tus peces, yo tendré el mismo número de peces que tú”. ¿Cuántos peces tenía cada una?

58. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 30 cm^2, y cuyo perímetro mide 26 cm.

59. Un peatón sale de una ciudad “A” a una velocidad de 4 km/h, y se dirige a una ciudad “B” que está a 12 km de la ciudad “A”, 30 minutos después sale un ciclista de la ciudad “B” a una velocidad de 16 km/h y se dirige hacia “A”, ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de “B” se cruzan?



60. Se desea mezclar aceite de 3 €/l con otro aceite de 4,2 €/l de modo que la mezcla resulte a 3,50 €/l. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 litros de la mezcla?

61. Al intercambiar las cifras de un número de dos cifras se obtiene otro que es 27 unidades mayor. Halla el número inicial.

62. La diagonal de un rectángulo mide 30 cm, y el perímetro 84 cm. Halla los lados del rectángulo.

63. Una valla rodea un terreno rectangular de 1000 m^2. Si la valla mide 130 metros, calcula las dimensiones del terreno.

64. Varios amigos van a hacer un regalo de bodas que cuesta 900 euros, que pagarán a partes iguales. A última hora se apuntan dos amigos más, con lo que cada uno toca a 15 euros menos. ¿Cuántos amigos eran inicialmente? ¿Cuánto pagará al final cada uno?

65. Las diagonales de un rombo se diferencian en 3 cm y su área es de 20 cm^2. Calcula su perímetro.

66. Un tren sale de Bilbao hacia Alcázar de San Juan a una velocidad de 140 km/h. Una hora más tarde sale otro tren de Alcázar de San Juan hacia Bilbao a 100 km/h; la distancia entre las dos ciudades es de 500 km. ¿Al cabo de cuánto tiempo se cruzan los dos trenes? ¿A qué distancia de Alcázar de San Juan?

67. Un coche sale de una ciudad “A” a una velocidad de 70 km/h y 30 minutos más tarde otro coche sale de “A” en la misma dirección y sentido a una velocidad de 120 km/h, ¿cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero y a qué distancia de “A” se produce el encuentro?

AUTOEVALUACIÓN

1. La solución de la ecuación $3(x-1)-2(x-2)=5$ es:

a) $x = 2$ b) $x = 4$ c) $x = -2/3$ d) $x = 3$

2. Las soluciones de la ecuación $156 = x(x-1)$ son:

a) $x = 11$ y $x = -13$ b) $x = 13$ y $x = -12$ c) $x = 10$ y $x = 14$ d) $x = -12$ y $x = -11$

3. Las soluciones de la ecuación $\frac{4x-1}{3}-\frac{x+2}{6}=\frac{x^2}{2}$ son:

a) $x = 2$ y $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ y $x = 4$ c) $x = 1$ y $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ y $x = 3$

4. Las soluciones de la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ son:

a) 1, –1, 4, –4 b) 1, –1, 2, –2 c) 2, –2, 3, –3 d) 2, –2, 5, –5

5. Las soluciones de la ecuación $2(x+2)-x(2-x)=0$ son:

a) Infinitas b) $x = 9$ y $x = 5$ c) no tiene solución d) $x = 1$ y $x = 4$

6. Las rectas que forman el sistema $\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+6y=4 \end{cases}$ son:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Se cruzan

7. La solución del sistema $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$ es:

a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 1$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) No tiene solución

8. La solución del sistema $\begin{cases} 3+2x-7=x-1+y \\ 2x-9y=13 \end{cases}$ es:

a) $x = 2$ e $y = -1$ b) $x = -2$ e $y = 1$ c) $x = 1$ e $y = 0$ d) $x = 3$ e $y = 1$

9. En una granja, entre pollos y cerdos hay 27 animales y 76 patas. ¿Cuántos pollos y cerdos hay en la granja?

a) 16 pollos y 11 cerdos b) 15 pollos y 12 cerdos c) 13 pollos y 14 cerdos

10. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15, le faltan 100 unidades para llegar a su cuadrado?

a) 20 años b) 7 años c) 25 años d) 8 años